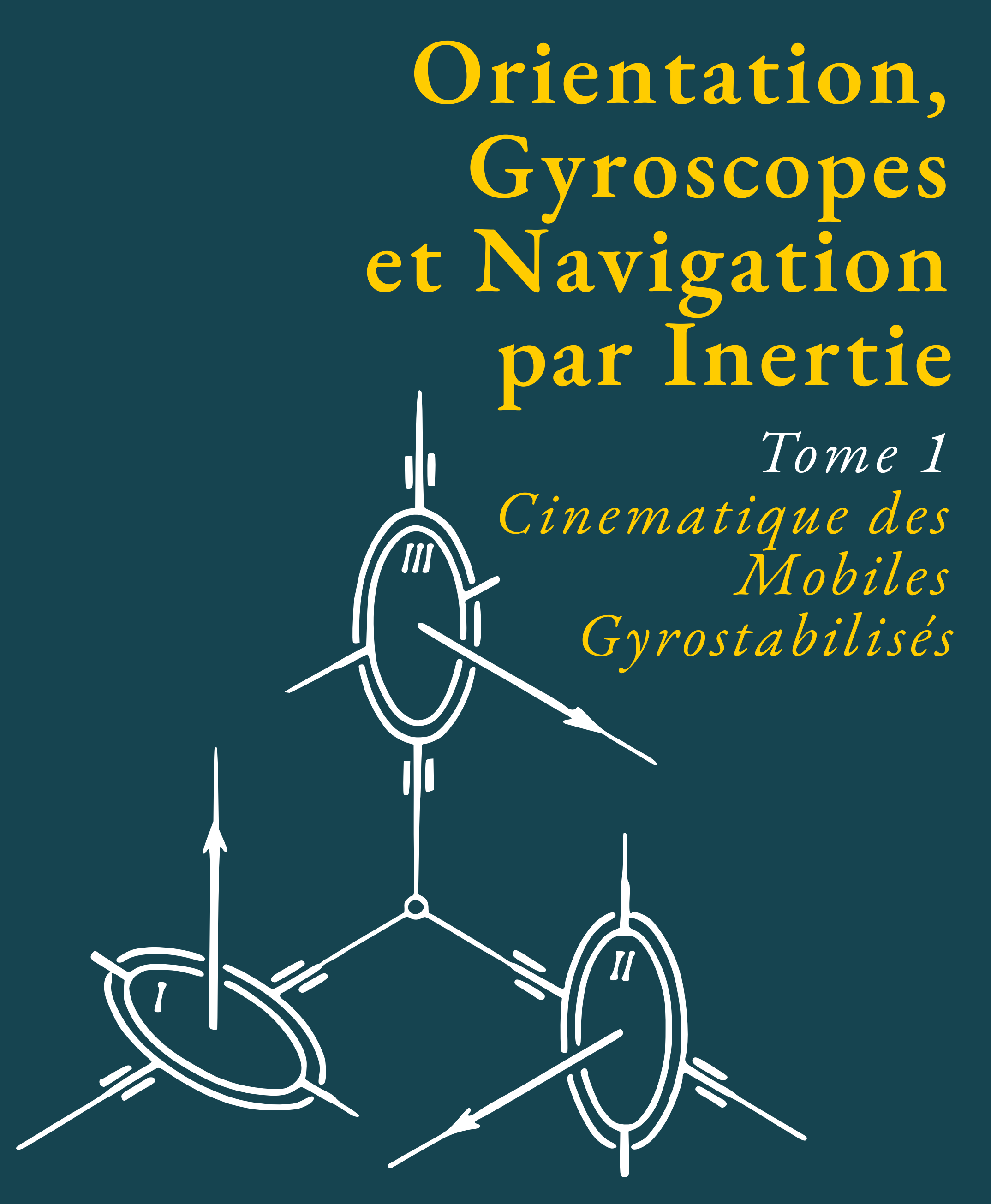
A. Ishlinsky

Orientation, Gyroscopes et Navigation par Inertie

Tome 1

Cinematique des Mobiles Gyrostabilisés



Éditions Mir Moscou

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

ОРИЕНТАЦИЯ, ГИРОСКОПЫ И ИНЕРЦИАЛЬНАЯ НАВИГАЦИЯ

Книга I

КИНЕМАТИКА ГИРОСТАБИЛИЗИРУЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

A. ISHLINSKY

ORIENTATION, GYROSCOPES ET NAVIGATION PAR INERTIE

Tome I

CINÉMATIQUE DES MOBILES GYROSTABILISÉS

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe
par V. KOLIMÉEV

На французском языке

En hommage de gratitude
à l'éminent savant soviétique
Boris BOULGAKOV
et au remarquable ingénieur de notre pays
Nicolaï OSTRIAKOV
dont les travaux en matière des gyroscopes ont une importance exceptionnelle

AVANT-PROPOS

Dans de nombreux cas d'importance pratique, le mouvement d'un véhicule guidé (avion, fusée, navire, etc.) doit s'effectuer de façon à ne présenter que de petits écarts par rapport à un programme donné. La réalisation de cette condition exige que l'on règle convenablement l'intensité et la direction de la force qui communique le mouvement au véhicule. A cet effet, il faut connaître, à tout instant, l'orientation et la position du véhicule dans l'espace. Il apparaît que si le véhicule est porteur d'appareils gyroscopiques de précision, son orientation et sa position peuvent être déterminées sans avoir à tenir compte d'information supplémentaire provenant de l'extérieur et sans observer des repères terrestres. Il suffit de connaître la position et l'orientation du véhicule à l'instant initial et de déterminer ensuite, à l'aide de calculateurs, les coordonnées du mobile par une résolution continue d'un système d'équations. Ces équations peuvent être finies (algébriques ou trigonométriques) ou différentielles. Dans le premier cas, elles traduisent des relations de nature géométrique entre les paramètres qui déterminent l'orientation des gyroscopes et celle du véhicule. Dans le second cas, elles expriment des relations cinématiques (non holonomes) analogues. Des équations différentielles décrivent aussi le comportement des gyroscopes et d'autres éléments d'un système destiné à la localisation d'un véhicule en mouvement. Ce système est appelé système de navigation par inertie, ou centrale à inertie, ou encore navigateur inertiel, parce que son fonctionnement est basé sur les propriétés d'inertie de la matière, c'est-à-dire sur les lois de la mécanique classique.

La présente monographie est consacrée à l'exposé des bases théoriques de la navigation par inertie utilisant des gyroscopes, à l'établissement et à la résolution des équations des principaux problèmes relatifs aussi bien à la détermination de l'orientation et de la position des objets mobiles qu'à l'étude du comportement des dispositifs gyroscopiques utilisés. Elle traite également de la théorie des gyroscopes et des appareils gyroscopiques (gyroscopes libres, gyropendules, gyrostabilisateurs, plates-formes gyroscopiques, gyrocompas, accéléromètres gyroscopiques, c'est-à-dire des appareils dont les indications constituent, pour les problèmes mentionnés plus haut, des variables indépendantes données qui interviennent dans des équations correspondantes).

La monographie examine uniquement la navigation par inertie des mobiles qui se déplacent à la surface de la Terre ou à une altitude constante donnée au-dessus de celle-ci. Malheureusement, le fonctionnement des navigateurs inertiels s'avère instable lorsqu'ils sont utilisés pour localiser un mobile qui change non seulement ses coordonnées géographiques mais également sa distance au centre de la Terre. Ils ne peuvent donc servir à une navigation de longue durée dans

l'espace. De tels navigateurs inertiels peu stables ne sont utilisés qu'à bord des véhicules qui subissent pendant très peu de temps l'action des forces autres que les forces de gravitation (poussée, résistance aérodynamique, etc.). Certaines questions théoriques relatives à ces systèmes de navigation sont exposées par l'auteur dans sa monographie « Guidage par inertie des fusées balistiques ».

La partie principale du texte de la présente monographie est publiée pour la première fois. En outre, la monographie contient, sous une forme nouvelle, les résultats de certaines recherches que l'auteur a publiées précédemment dans des revues scientifiques de mécanique et en partie dans ses livres: « Mécanique des systèmes gyroscopiques » (principalement les paragraphes des deux premiers chapitres) et « Guidage par inertie des fusées balistiques » (paragraphe sur l'accéléromètre et annexe).

La monographie est publiée en deux tomes. Le premier — « Cinématique des mobiles gyrostabilisés » — traite essentiellement des questions géométriques et cinématiques relatives à l'orientation et à la stabilisation des mobiles. Le second tome — « Systèmes gyroscopiques de navigation par inertie » — de volume un peu plus grand, expose, en plus de la théorie de certains appareils et dispositifs gyroscopiques et du rappel de la mécanique du mouvement relatif, les bases théoriques de la mécanique des systèmes de navigation par inertie.

L'auteur tient à remercier particulièrement M. Temtchenko pour son aide efficace lors de la rédaction de la monographie et sa préparation à la publication. Il manifeste sa gratitude à V. Storojenko qui a bien voulu relire le texte du manuscrit et susciter des améliorations importantes, et à V. Lidsky pour ses recommandations utiles sur l'exposé de la partie mathématique de la monographie.

INTRODUCTION

Comme il a été dit dans l'avant-propos, le premier tome est consacré exclusivement aux questions de l'orientation des mobiles équipés, en règle générale, de gyroscopes. Ces derniers enregistrent les différents paramètres d'orientation (tangage, roulis, bande, assiette, cap, disposition angulaire relative des objets, etc.) ou élaborent des ordres pour une variation convenable de ces paramètres à l'aide des systèmes de commande de l'orientation (conservation ou au contraire variation programmée du cap, du tangage, des projections de la vitesse angulaire sur des axes donnés, en particulier sur des axes liés au véhicule en mouvement). On suppose que, les systèmes de commande étant d'une haute efficacité, les ordres prescrits par les gyroscopes soient exécutés pratiquement d'une manière instantanée et tout à fait exactement. On néglige par là même les phénomènes transitoires qui se produisent dans les systèmes de commande et on ne tient pas compte des erreurs, dites aléatoires, dans les systèmes d'asservissement. Néanmoins, les méthodes développées dans le premier tome sont suffisantes pour tenir compte des circonstances mentionnées lors de la résolution de nombreux problèmes relatifs à la détermination de l'orientation des mobiles.

Dans le premier tome, on suppose également que les gyroscopes sont exempts de dérives et que les axes de rotation propre de leurs rotors conservent l'orientation vers les étoiles fixes ou au contraire sont corrigés si habilement qu'ils conservent des angles constants avec les directions Est et Nord et la verticale du lieu. Si le véhicule est porteur de systèmes à deux ou plusieurs gyroscopes, ainsi que de gyroscopes à forte correction, on admet que sont valables les lois de la théorie de précession des gyroscopes et que les forces

qui troublent leur comportement idéal sont absentes ou connues. De telles hypothèses sont parfaitement justifiables pour résoudre les problèmes de l'orientation examinés dans le premier tome.

Quant au second tome, beaucoup de questions concernant le comportement des gyroscopes et des systèmes gyroscopiques sont étudiées d'un point de vue plus général, notamment à l'aide des équations dites complètes et en tenant compte des phénomènes transitoires intervenant dans les éléments électromécaniques des gyrostabilisateurs.

Le premier chapitre de ce livre traite des questions relatives à la détermination de l'orientation d'un véhicule en mouvement par enregistrement des angles de rotation des anneaux des suspensions à la cardan qui portent des dispositifs de stabilisation gyroscopique.

On y définit la bande et l'assiette comme des angles bien déterminés que l'on peut directement mesurer sur un navire oscillant, à condition d'assurer une stabilisation parfaite, dans le plan horizontal, de l'anneau de cardan intérieur. Ceci étant, on considère que l'axe de l'anneau de cardan extérieur est rigoureusement parallèle à l'axe longitudinal du navire. De même, on définit de façon univoque le cap du navire. On prend pour cap la lecture d'un compas idéal qui indique, sans déviation aucune, la direction des points cardinaux. L'axe de l'anneau de cardan extérieur portant la sphère d'asservissement du compas (on a en vue un compas gyroscopique « Anschütz ») est dirigé, lui aussi, suivant l'axe longitudinal du navire; l'axe de rotation de la sphère d'asservissement est supposé rigoureusement vertical.

Une autre structure de la suspension à la cardan (par exemple, l'utilisation d'une suspension dite par bicardan), une autre position de l'axe de son anneau extérieur par rapport au navire et un montage imprécis d'une suspension par rapport à l'autre conduisent à diverses erreurs dans la détermination de la bande, de l'assiette et du cap du navire. Toutes ces erreurs sont dites de cardan. L'ignorance de la plus simple de ces erreurs, à savoir: de la rotation relative des anneaux intérieurs, stabilisés dans le plan horizontal, de deux suspensions à la cardan dont les axes des anneaux extérieurs occupent des positions différentes dans le plan du pont du navire, a provoqué en pratique, au cours des années trente, des malentendus regrettables.

De nombreuses formules approchées utilisées pour le calcul des erreurs de cardan, des erreurs de stabilisation et des erreurs dans la détermination des coordonnées angulaires des objectifs éloignés peuvent s'établir tant par voie analytique qu'à l'aide de l'appareil

vectoriel de la théorie des rotations infiniment petites. Quant aux formules exactes correspondantes, on peut les établir aussi bien par des méthodes purement analytiques, qu'à l'aide de la théorie des rotations finies qui a recours soit à l'algèbre des matrices, soit au calcul des quaternions avec les paramètres de Rodrigues-Hamilton et de Cayley-Klein. Les renseignements et exemples nécessaires qui s'y rapportent sont indiqués dans le deuxième et en partie dans le troisième chapitre de ce livre (voir aussi tome II, chapitre VI).

Le troisième chapitre est consacré essentiellement à l'exposé (sur des exemples concrets) des méthodes de résolution des problèmes relatifs à la détermination de l'orientation d'un mobile dont le système de stabilisation utilise des gyroscopes dits libres. A titre d'exemple caractéristique et d'une importance capitale pour les applications citons ici le calcul de la variation de cap d'un véhicule guidé par un gyroscope directionnel, lorsque ce véhicule présente une bande conjuguée avec une assiette.

Dans le quatrième chapitre, on suppose que le guidage des véhicules en mouvement est assuré avec la participation des appareils gyroscopiques du type des gyroscopes à forte correction, des plates-formes à deux gyroscopes et des stabilisateurs gyroscopiques à trois axes. Dans ces cas tout se passe comme si de tels dispositifs gyroscopiques imposaient des liaisons non holonomes au mouvement angulaire du véhicule. Ces liaisons ne s'opposent pas à une modification progressive de l'orientation du véhicule guidé par de tels dispositifs gyroscopiques. On met ici à profit le théorème dit théorème de l'angle solide qui se résume de la façon suivante. Soit un corps solide qui se meut autour d'un point fixe à partir de l'état de repos. Supposons que son mouvement est soumis à une seule condition : la projection de la vitesse angulaire du corps sur une droite rigidement liée à ce corps est invariablement nulle. Si cette droite décrit un cône (pas nécessairement circulaire) et reprend sa position de départ, le corps tournera autour de la droite mentionnée d'un angle égal à la mesure de l'angle solide du cône décrit par la droite.

Les dérives systématiques (modifications de l'orientation) d'un stabilisateur gyroscopique à trois axes se caractérisent, dans le cas des petites variations périodiques de sa vitesse angulaire autour de zéro, par des relations de nature géométrique voisine. La théorie d'un tel stabilisateur gyroscopique est exposée, elle aussi, dans le quatrième chapitre.

Dans l'annexe, on considère un problème apparenté à la théorie des rotations finies, à savoir : la détermination de la vue de la projection d'une construction quelconque sur un plan donné. Ce problème se résout analytiquement, par multiplication des matrices de rotations finies. Par une méthode à peu près analogue, ce problème peut

être résolu également sur des calculateurs électroniques modernes équipés d'un dispositif de sortie des résultats sur un écran lumineux (display).

Note: Pour plus de commodité, la bibliographie est indiquée à la fin de chaque chapitre. En outre, les ouvrages principaux cités dans le texte sont indiqués dans les notes au bas des pages correspondantes.

CHAPITRE PREMIER

GÉOMÉTRIE DES SUSPENSIONS À LA CARDAN

§ 1. Suspension à la cardan la plus simple. Définition de la bande, de l'assiette et du cap du navire. Erreur de cardan

La suspension à la cardan la plus simple (fig.1) est une partie constitutive des appareils gyroscopiques et de nombreux autres appareils installés à bord des véhicules. En particulier, la suspension à la cardan est utilisée pour la réalisation d'un horizon dit artificiel à bord d'un navire oscillant, d'un avion ou d'un autre véhicule. A cet effet, le plan de l'anneau de cardan intérieur est maintenu à l'horizontale soit à l'aide des gyroscopes qu'il porte (stabilisation par gyroscopes), soit à l'aide de systèmes d'asservissement ; ces derniers font tourner l'anneau de cardan extérieur par rapport au boîtier de l'appareil, et l'anneau intérieur par rapport à l'anneau extérieur, les angles de rotation étant élaborés par d'autres dispositifs gyroscopiques ou indicateurs.

A bord des navires de mer, la suspension à la cardan dont le plan de l'anneau intérieur est stabilisé à l'horizontale, est montée en règle générale de telle sorte que l'axe de l'anneau de cardan extérieur est parallèle à l'axe longitudinal du navire. On appelle *bande* du navire l'angle θ fait par le plan de l'anneau de cardan extérieur avec le plan du pont. La bande est considérée comme positive si le bâbord du navire est surélevé au-dessus de l'horizon par rapport au tribord, c'est-à-dire si le navire prend une inclinaison sur le tribord. Il est évident que pour $\theta > 0$ l'anneau de cardan extérieur est tourné par rapport au pont du navire en sens des aiguilles d'une montre si on le regarde du côté de l'avant du navire.

L'angle ψ formé par les plans des deux anneaux dans la position mentionnée de la suspension à la cardan s'appelle *assiette* du navire. L'assiette est considérée comme positive si l'arrière du navire est surélevé par rapport à son avant. Si l'on regarde la suspension à la cardan du côté du tribord, l'anneau intérieur est tourné, pour $\psi > 0$ (v. fig. 1) par rapport à l'anneau extérieur en sens inverse des aiguilles d'une montre [1]).

---

[1]) Au lieu de la bande et de l'assiette on utilise souvent d'autres angles et en particulier les *angles* dits *de roulis* et *de tangage*, ϑ et Φ (v. § 2).

Les angles θ et ψ déterminent l'orientation du navire par rapport au plan horizontal [1]). Pour déterminer l'orientation du navire par rapport aux points cardinaux, on introduit un angle $\varkappa$ appelé *cap du navire* et égal à l'angle fait par la direction Nord avec une *ligne* dite *de foi*. Par cette dernière on entend une droite η liée à l'anneau intérieur, stabilisé à l'horizontale, de la suspension à la cardan considérée, et confondue avec l'axe de l'anneau extérieur lorsque $\psi = 0$. Il est

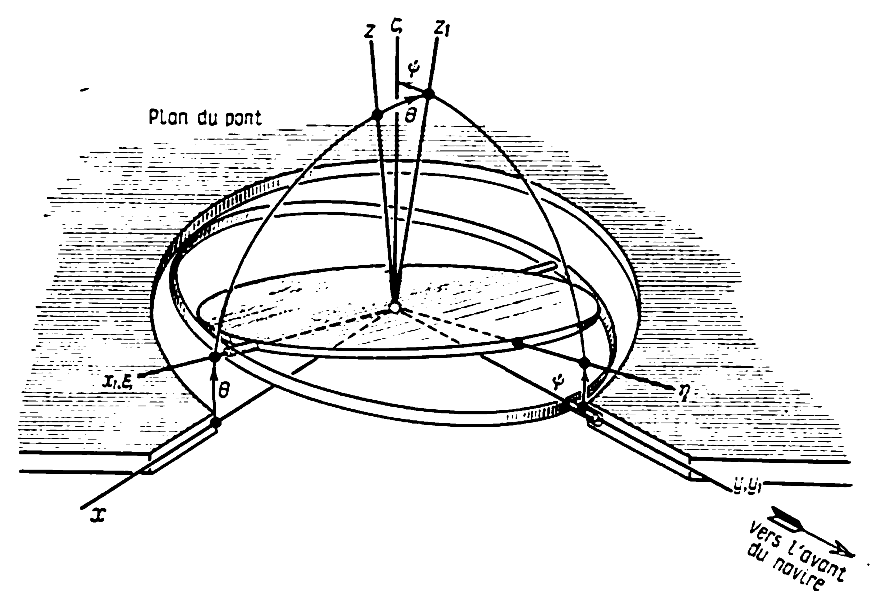


Fig. 1

aisé de s'assurer que pour $\psi \neq 0$ la ligne de foi η est parallèle à la projection de l'axe longitudinal du navire sur le plan horizontal (fig. 2).

Le cap du navire $\varkappa$ est compté à partir de la direction Nord dans le sens des aiguilles d'une montre. C'est précisément l'angle $\varkappa$ ainsi défini que mesurent et reproduisent sur les répétiteurs les compas gyroscopiques utilisés à bord des navires. Lorsque l'angle $\varkappa$ augmente, le navire effectue une giration à droite, c'est-à-dire tourne

[1]) En aviation, la position de l'avion par rapport au plan horizontal est caractérisée par le roulis γ et par le tangage ϑ. Le *roulis* d'un avion est défini, de même que la bande d'un navire, si l'on convient de prendre pour « pont » de l'avion un plan contenant ses axes longitudinal et transversal. On appelle *tangage* d'un avion l'angle fait par son axe longitudinal avec le plan horizontal; le tangage est positif si l'avant de l'avion est surélevé. Ainsi, par définition: $\gamma = \theta$ et $\vartheta = -\psi$.

dans le sens des aiguilles d'une montre pour un observateur qui le regarde d'en haut. Si par exemple $\varkappa = 0$, l'avant du navire est dirigé vers le Nord, si $\varkappa = -90°$, il est orienté vers l'Ouest, etc.

La différence entre la valeur actuelle du cap et sa valeur assignée par le programme (en règle générale, constante pour de grands intervalles de temps) est généralement désignée sous le nom d'*embardée* du navire.

Les angles θ, ψ et $\varkappa$ déterminent entièrement la position angulaire instantanée du navire, en tant que corps solide, par rapport au

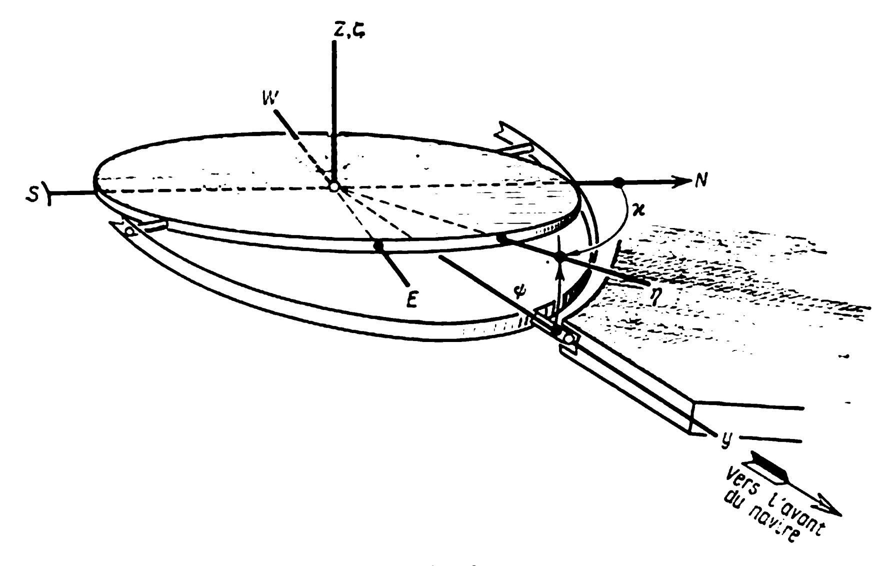


Fig. 2

système de coordonnées géographiques ENZ (v. fig. 2). Les axes de ce système sont orientés respectivement vers l'Est, vers le Nord et verticalement vers le haut et son origine est au point où se trouve le navire.

Il semble à première vue que la position de l'axe de l'anneau de cardan extérieur par rapport au pont est sans importance pour la détermination du cap du navire. Il serait suffisant, paraît-il, que cet axe soit parallèle au pont et que pour ligne de foi soit prise une droite liée à l'anneau de cardan intérieur, et parallèle à l'axe longitudinal du navire lorsque celui-ci ne donne ni de la bande, ni de l'assiette. Pourtant, il n'en est pas ainsi. On peut montrer que les anneaux intérieurs, stabilisés à l'horizontale, de deux suspensions à la cardan dont les axes des anneaux extérieurs occupent des positions différentes tournent l'un par rapport à l'autre s'il y a des mouvements du roulis et du tangage. Ci-dessous, nous considérons le cas

où les axes des anneaux de cardan extérieurs sont parallèles au plan du pont et forment entre eux un angle droit (un cas plus général sera étudié au paragraphe suivant du présent chapitre).

Ainsi, supposons que l'axe de l'anneau extérieur d'une première suspension à la cardan est parallèle à l'axe longitudinal du navire, alors que l'axe de l'anneau extérieur d'une deuxième suspension est parallèle à l'axe transversal, c'est-à-dire est perpendiculaire au plan de symétrie du navire (fig. 3, *a* et 3, *b*). Les plans des anneaux intérieurs des deux suspensions sont horizontaux.

Introduisons un système de coordonnées xyz rigidement lié au navire. Dirigeons l'axe x vers le tribord du navire, parallèlement à

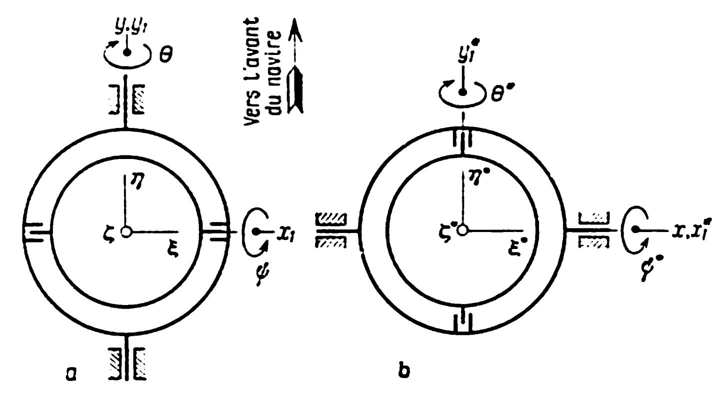


Fig. 3

son axe transversal, l'axe y vers l'avant du navire, parallèlement à son axe longitudinal et enfin l'axe z vers le haut, perpendiculairement au pont, c'est-à-dire parallèlement au mât. Considérons par ailleurs des systèmes de coordonnées $x_1y_1z_1$ et $\xi\eta\zeta$ liés respectivement aux anneaux extérieur et intérieur de la première suspension à la cardan, ainsi que des systèmes $x_1^*y_1^*z_1^*$ et $\xi^*\eta^*\zeta^*$ liés aux anneaux extérieur et intérieur de la deuxième suspension. Dirigeons les axes de ces systèmes de telle sorte que pour la position horizontale du plan xy, donc du pont du navire, ils soient parallèles respectivement aux axes x, y et z.

L'axe y_1 du système $x_1y_1z_1$ (lié à l'anneau extérieur de la première suspension à la cardan) est, de tout le temps, parallèle à l'axe y, c'est-à-dire à l'axe longitudinal du navire (v. fig. 3, *a* et 4 sur lesquelles l'origine commune des systèmes $x_1y_1z_1$ et $\xi\eta\zeta$ est confondue, pour la commodité de l'analyse, avec l'origine du système xyz).

Admettons que l'anneau de cardan extérieur de la première suspension est tourné autour de l'axe y, par rapport au pont, de l'angle θ qui est, d'après ce qui précède, la bande du navire (v. fig. 4).

Pour $\theta > 0$, le système de coordonnées $x_1y_1z_1$ est tourné, avec l'anneau de cardan extérieur, dans le sens des aiguilles d'une montre par rapport au système xyz si on le regarde du côté de la partie positive de l'axe y (ou, ce qui revient au même, de l'axe y_1). La table des

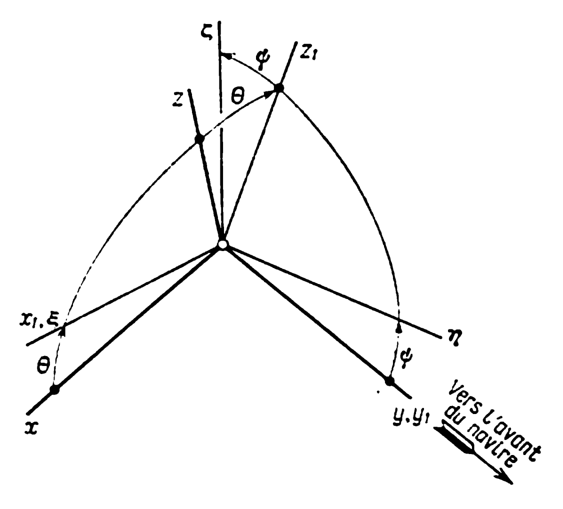


Fig. 4

cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes de coordonnées $x_1y_1z_1$ et xyz peut donc s'écrire sous la forme

	x	y	z	
x_1	$\cos\theta$	0	$\sin\theta$	(1.1.1)
y_1	0	1	0	
z_1	$-\sin\theta$	0	$\cos\theta.$	

L'axe ξ de l'anneau intérieur de la première suspension à la cardan coïncide avec l'axe x_1 relatif à son anneau extérieur. Le système $\xi\eta\zeta$ étant lié à l'anneau intérieur de la première suspension, stabilisé par hypothèse à l'horizontale, le plan $\xi\eta$ et les axes ξ et x_1 sont horizontaux.

L'anneau intérieur de la première suspension tourne par rapport à l'anneau extérieur autour des axes confondus ξ et x_1, de l'angle ψ. D'après ce qui a été établi plus haut, cet angle s'appelle assiette du navire. Si cet angle est positif, le système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ est tourné par rapport au système $x_1y_1z_1$ en sens inverse des aiguilles d'une montre lorsqu'on regarde cette rotation du côté de la partie positive des axes ξ et x_1. La table des cosinus des angles formés par

les axes des systèmes $\xi\eta\zeta$ et $x_1y_1z_1$ est alors

$$\begin{array}{cccc} & x_1 & y_1 & z_1 \\ \xi & 1 & 0 & 0 \\ \eta & 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ \zeta & 0 & -\sin\psi & \cos\psi. \end{array} \qquad (1.1.2)$$

On peut maintenant construire la table des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes de coordonnées $\xi\eta\zeta$ et xyz. A cet effet, utilisons le théorème bien connu de la géométrie analytique sur le cosinus de l'angle de deux droites dans l'espace. On a, par exemple,

$$\cos(\widehat{\xi, y}) = \cos(\widehat{\xi, x_1})\cos(\widehat{x_1, y}) + \cos(\widehat{\xi, y_1})\cos(\widehat{y_1, y}) + \\ + \cos(\widehat{\xi, z_1})\cos(\widehat{z_1, y}). \qquad (1.1.3)$$

Les cosinus des autres angles sont définis par des formules analogues [1]). En utilisant les tables (1.1.1), (1.1.2) et les formules du type (1.1.3), nous obtenons finalement une nouvelle table des cosinus des angles formés par les axes des systèmes de coordonnées $\xi\eta\zeta$ et xyz

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ \xi & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ \eta & -\sin\theta\sin\psi & \cos\psi & \cos\theta\sin\psi \\ \zeta & -\sin\theta\cos\psi & -\sin\psi & \cos\theta\cos\psi. \end{array} \qquad (1.1.4)$$

Si l'on a une certaine habitude, on peut déduire cette table directement. Il suffit par exemple de projeter sur les axes x, y et z des segments de longueur unité portés par les axes ξ, η et ζ. Pour trouver $\cos(z, \zeta)$ par exemple, il convient de calculer d'abord la projection du segment unité de l'axe z sur les axes x_1, y_1 et z_1, de projeter ensuite chacune de ces projections sur l'axe ζ et d'additionner les résultats.

Il se peut dans ce cas que certaines projections intermédiaires soient nulles.

Reportons-nous maintenant à la deuxième suspension à la cardan. L'axe x_1^* de l'anneau extérieur de cette suspension (fig. 3, *b* et 5)

---

[1]) La formule (1.1.3) et des formules analogues sont identiques à celles utilisées pour la détermination des coefficients d'une matrice carrée de troisième rang, qui représente le produit de deux autres matrices de même rang (v. chap. III, § 7).

est parallèle à l'axe x et à l'axe transversal du navire [1]), c'est-à-dire est perpendiculaire au plan de symétrie du navire. Désignons par ψ^* l'angle de rotation de l'anneau extérieur de la deuxième suspension autour de l'axe x_1^* par rapport au pont du navire et notons θ^* l'angle que font entre eux les plans des anneaux intérieur et extérieur de cette suspension. D'après la règle énoncée plus haut sur le signe de l'angle ψ, convenons que pour $\psi^* > 0$ l'anneau extérieur de la deuxième suspension et, donc le système de coordonnées $x_1^*y_1^*z_1^*$ qui lui est lié, sont tournés autour de l'axe x_1^* (x) en sens inverse des aiguilles d'une montre par rapport au système xyz, c'est-à-dire par rapport

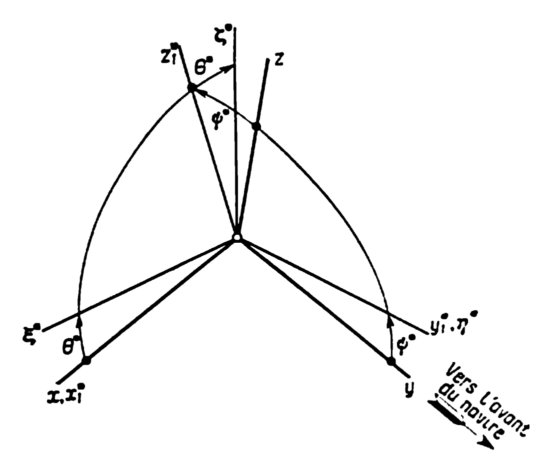


Fig. 5

au navire ; dans ce cas, la rotation doit être observée du côté de la partie positive de l'axe x_1^* (ou de l'axe x qui lui est parallèle, c'est-à-dire du côté du tribord du navire). Par suite, la table des cosinus des angles formés par les axes des systèmes $x_1^*y_1^*z_1^*$ et xyz se présente sous la forme

	x	y	z
x_1^*	1	0	0
y_1^*	0	$\cos\psi^*$	$\sin\psi^*$
z_1^*	0	$-\sin\psi^*$	$\cos\psi^*$.

(1.1.5)

D'une manière analogue, nous considérerons que $\theta^* > 0$ si l'anneau intérieur et le système de coordonnées $\xi^*\eta^*\zeta^*$ qui lui est lié sont

[1]) Sur les figures 3, *b* et 5 l'origine du système de coordonnées xyz est confondue avec le centre de la deuxième suspension. Une telle mise en coïncidence des origines des systèmes de coordonnées (sans changement, bien entendu, de l'orientation de leurs axes) sera utilisée assez souvent par la suite.

tournés autour de l'axe y_1^* (ou, ce qui revient au même, autour de l'axe η^*) par rapport au système de coordonnées $x_1^*y_1^*z_1^*$, c'est-à-dire par rapport à l'anneau extérieur de la deuxième suspension, dans le sens des aiguilles d'une montre lorsqu'on observe la rotation du côté de la partie positive des axes confondus η^* et y_1^* (c'est-à-dire du côté de l'avant du navire).

La table des cosinus des angles formés par les axes des systèmes $\xi^*\eta^*\zeta^*$ et $x_1^*y_1^*z_1^*$ est de la forme

$$\begin{array}{cccc} & x_1^* & y_1^* & z_1^* \\ \xi^* & \cos\theta^* & 0 & \sin\theta^* \\ \eta^* & 0 & 1 & 0 \\ \zeta^* & -\sin\theta^* & 0 & \cos\theta^*. \end{array} \qquad (1.1.6)$$

En faisant usage des tables (1.1.5) et (1.1.6) on peut construire la table des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes de coordonnées $\xi^*\eta^*\zeta^*$ et xyz:

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ \xi^* & \cos\theta^* & -\sin\theta^*\sin\psi^* & \sin\theta^*\cos\psi^* \\ \eta^* & 0 & \cos\psi^* & \sin\psi^* \\ \zeta^* & -\sin\theta^* & -\cos\theta^*\sin\psi^* & \cos\theta^*\cos\psi^*. \end{array} \qquad (1.1.7)$$

Par hypothèse, l'anneau intérieur de la deuxième suspension, de même que l'anneau intérieur de la première, sont stabilisés à l'horizontale, c'est-à-dire que les plans $\xi\eta$ et $\xi^*\eta^*$ sont horizontaux. Par voie de conséquence, les axes ζ et ζ^* sont parallèles et les cosinus des angles qu'ils forment avec les axes x, y et z sont respectivement égaux l'un à l'autre. Aussi, les tables (1.1.4) et (1.1.7) permettent-elles d'écrire trois égalités suivantes:

$$\begin{aligned} -\sin\theta\cos\psi &= -\sin\theta^*, \\ -\sin\psi &= -\cos\theta^*\sin\psi^*, \\ \cos\theta\cos\psi &= \cos\theta^*\cos\psi^* \end{aligned} \qquad (1.1.8)$$

dont chacune résulte des deux autres. Les égalités (1.1.8) entraînent les formules

$$\begin{aligned} \sin\theta^* &= \sin\theta\cos\psi, \quad \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\theta^*\sec\psi^*, \\ \operatorname{tg}\psi^* &= \operatorname{tg}\psi\sec\theta, \quad \sin\psi = \sin\psi^*\cos\theta^* \end{aligned} \qquad (1.1.9)$$

qui permettent d'exprimer les angles θ^*, ψ^* par l'intermédiaire des angles θ, ψ et inversement les angles θ, ψ par θ^* et ψ^*.

En rapprochant les tables (1.1.4) et (1.1.7) des formules (1.1.9) nous concluons que lorsque les angles θ et ψ sont différents de zéro, les systèmes de coordonnées $\xi\eta\zeta$ et $\xi^*\eta^*\zeta^*$ (et donc les anneaux de cardan intérieurs qui leur sont liés) sont orientés de façon diffé-

rente. Les axes ζ et ζ^* étant parallèles, l'un des systèmes se trouve tourné, autour de la verticale, par rapport à l'autre d'un angle χ (fig. 6). Nous considérons cet angle comme positif si le système de coordonnées $\xi^*\eta^*\zeta^*$ est tourné par rapport au système $\xi\eta\zeta$ dans le sens des aiguilles d'une montre, lorsque la rotation est observée du côté de la partie positive des axes ζ et ζ^*, c'est-à-dire d'en haut. Il est facile de constater (fig. 6) que

$$\cos(\widehat{\xi,\ \eta^*}) = \sin\chi. \tag{1.1.10}$$

Puisque

$$\cos(\widehat{\xi,\ \eta^*}) = \cos(\widehat{\xi,\ x})\cos(\widehat{x,\ \eta^*}) + \cos(\widehat{\xi,\ y})\cos(\widehat{y,\ \eta^*}) + \\ + \cos(\widehat{\xi,\ z})\cos(\widehat{z,\ \eta^*}), \tag{1.1.11}$$

les tables (1.1.4) et (1.1.7) permettent d'obtenir, pour la détermination de l'angle χ, la relation suivante:

$$\sin\chi = \sin\theta\sin\psi^* \tag{1.1.12}$$

qui peut être mise, compte tenu des formules (1.1.9), aussi sous la forme

$$\sin\chi = \frac{\sin\theta\sin\psi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\psi}}. \tag{1.1.13}$$

En supposant les angles θ et ψ assez petits, nous déduisons de la dernière relation la formule

$$\chi = \theta\psi, \tag{1.1.14}$$

exacte à des termes de troisième ordre en θ et ψ près. Une formule plus exacte (au quatrième ordre près) est de la forme

$$\chi = \theta\psi\left(1 - \frac{1}{6}\psi^2 + \frac{1}{3}\theta^2\right). \tag{1.1.15}$$

Fig. 6

Ainsi, soient deux suspensions à la cardan installées à bord d'un navire. Etant donné que l'axe de l'anneau extérieur de la première suspension est dirigé parallèlement à l'axe longitudinal du navire et que l'axe de l'anneau extérieur de la deuxième suspension est perpendiculaire au plan de symétrie du navire, si l'on stabilise, par un procédé ou par un autre, les plans des anneaux intérieurs des deux suspensions à la cardan dans le plan horizontal, les anneaux

stabilisés tourneront, en vertu de la relation (1.1.13), l'un par rapport à l'autre, lorsque le navire subira un mouvement de roulis ou de tangage.

Exemple numérique.— Supposons que la bande $\theta = 15°$ et l'assiette $\psi = 7°$. Alors la relation (1.1.13) donne $\chi = 0{,}03264$ (1°52,2′). En même temps, la formule approchée (1.1.14) donne $\chi = 0{,}03199$ (1°50,0′). Le calcul à l'aide de la formule plus exacte (1.1.15) conduit à une valeur de l'angle χ égale à 0,03264 (1°52,2′) qui est la valeur exacte si l'on se limite à quatre chiffres significatifs.

Cet exemple montre que dans certains cas l'angle χ peut prendre des valeurs importantes. Pour éviter des erreurs considérables, on doit tenir compte de cette dernière circonstance lors de la fixation des directions quelconques en azimut sur les anneaux stabilisés. Soit par exemple, un gyroscope de direction, orienté suivant la ligne Nord-Sud (NS) et placé sur l'anneau intérieur, stabilisé à l'horizontale, de la première suspension (dont le schéma est représenté sur la figure 3, *a*). Supposons que l'axe η (ligne de foi) forme avec l'axe du gyroscope de direction un angle $\varkappa$ (cap du navire). Reproduisons, à l'aide de systèmes d'asservissement, l'angle $\varkappa$ sous forme de l'angle que l'axe η^* de la deuxième suspension à la cardan (réalisée suivant le schéma de la fig. 3, *b*) fait avec l'axe optique du viseur placé sur son anneau intérieur stabilisé à l'horizontale (l'axe optique du viseur est situé dans le plan de l'anneau intérieur). D'après ce qui précède, au cas où le navire sera soumis à un mouvement de roulis ou de tangage, l'axe optique du viseur s'anime d'un mouvement angulaire se produisant dans le plan horizontal. Ainsi, sa direction s'avère non stabilisée et écartée de la ligne Nord-Sud (NS) de l'angle χ dont la valeur est donnée par la formule (1.1.13).

La rotation relative des anneaux stabilisés des suspensions à la cardan différemment disposées a été décelée, pour la première fois, à la fin des années trente, lors de leur montage à bord d'un navire. On lui a donné le nom d'*erreur de cardan* [1]). Pour éviter cette erreur, les suspensions à la cardan dont les anneaux intérieurs sont stabilisés à l'horizontale, sont généralement montées de telle sorte que les axes de leurs anneaux extérieurs soient parallèles à l'axe longitudinal du navire (v. fig. 3, *a* et 4), c'est-à-dire comme la première des suspensions examinées plus haut.

§ 2. Suspension par bicardan

Dans certains appareils installés à bord des navires on utilise un dispositif de suspension plus complexe que la suspension à la cardan la plus simple décrite au paragraphe précédent. Ce dispositif est

[1]) L'erreur de cardan a été calculée pour la première fois par G. Tchékhovitch à l'aide des méthodes de la trigonométrie sphérique.

connu sous le nom de *suspension par bicardan*. Sa constitution est la suivante. L'anneau intérieur de la suspension à la cardan ordinaire est cinématiquement lié à une anse spéciale A dont l'axe est perpendiculaire à l'axe de l'anneau extérieur de la suspension (fig. 7). Sur l'arc de l'anse glisse un chariot C avec un palier P. Ce dernier comporte une barre B solidaire de l'anneau intérieur de la suspension ; l'axe de la barre est perpendiculaire au plan de cet anneau. Ainsi, pour changer l'orientation de l'anneau intérieur par rapport

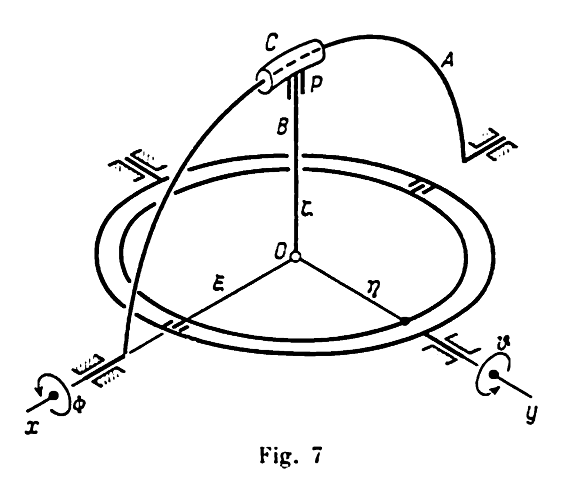


Fig. 7

au boîtier de la suspension, il suffit de faire tourner l'anneau extérieur et l'anse par rapport au boîtier. Dans ces conditions, les servomoteurs assurant la rotation de l'anneau extérieur et de l'anse peuvent être montés sur le boîtier de la suspension, ce qui est d'une commodité indiscutable. Ce dispositif a reçu le nom de suspension par bicardan parce qu'au point de vue cinématique l'anse A et le chariot C constituent une seconde suspension à la cardan dans laquelle le rôle de l'anneau extérieur est tenu par l'anse A et celui de l'anneau intérieur par le chariot C. Les axes des anneaux extérieurs des suspensions à la cardan principale et auxiliaire sont perpendiculaires entre eux et donc disposés de la même façon que les anneaux extérieurs des suspensions représentées par les figures 3, *a* et 3, *b*. Ceci explique la nécessité d'utiliser le palier P. En effet, lorsque le navire est soumis au mouvement de roulis ou de tangage, le chariot C et l'anneau intérieur de la suspension à la cardan principale doivent tourner l'un par rapport à l'autre d'un angle exactement égal à l'erreur de cardan.

A la différence des suspensions à la cardan les plus simples, les suspensions par bicardan n'exigent pas, lors de leur montage sur le pont d'un navire, de procéder à la mise en accord des axes mention-

née au paragraphe précédent. Supposons que l'anneau intérieur de l'une des suspensions par bicardan est stabilisé dans le plan horizontal et que les angles de rotation de l'anneau extérieur et de l'anse sont enregistrés. Reproduisons (à l'aide de systèmes d'asservissement) ces angles sur une autre suspension par bicardan. Le plan de l'anneau intérieur de cette dernière sera, bien entendu, horizontal si les axes des anneaux extérieurs des deux suspensions sont parallèles. Faisons tourner maintenant la seconde suspension de 90° dans le plan du pont et rendons l'angle de rotation de son anse égal à l'angle de rotation de l'anneau extérieur de la première suspension. Puis réalisons l'égalité des angles de rotation de l'anse et de l'anneau extérieur respectivement de la première et de la seconde suspension. Avec un choix convenable du sens des rotations mentionnées, le plan de l'anneau intérieur de la seconde suspension sera, comme nous le montrerons un peu plus loin, de nouveau horizontal. Quant aux suspensions les plus simples, pour assurer leur travail en commun il faut que les axes de leurs anneaux extérieurs soient parallèles. En effet, si ces axes sont perpendiculaires et les angles de rotation des anneaux extérieur et intérieur de la première suspension sont respectivement égaux aux angles de rotation des anneaux intérieur et extérieur de la seconde suspension (avec un choix correct de leurs sens), les plans des anneaux intérieurs seront, dans le cas général, non parallèles. Pour assurer le parallélisme, il faut que les angles mentionnés soient liés par des relations du type (1.1.9).

Proposons-nous maintenant de justifier la propriété indiquée des suspensions par bicardan. Introduisons un système de coordonnées xyz lié maintenant au boîtier de l'une des suspensions par bicardan. Plaçons son origine au centre géométrique de la suspension choisie, c'est-à-dire au point d'intersection des axes de l'anse et de l'anneau extérieur; par ce point, qui est à la fois le centre de l'arc de l'anse, passent aussi l'axe de l'anneau intérieur et l'axe de la barre B. Dirigeons l'axe x suivant l'axe de l'anse et l'axe y suivant l'axe de l'anneau extérieur (sur la fig. 7, l'axe z n'est pas indiqué). Prenons pour position initiale de l'anneau extérieur la position dans laquelle le plan de l'anneau est confondu avec le plan xy. Désignons par ϑ l'angle de rotation de l'anneau extérieur à partir de la position initiale et considérons que $\vartheta > 0$ si cet anneau est tourné en sens inverse des aiguilles d'une montre pour un observateur placé du côté de la partie positive de l'axe y. Supposons également que dans la position initiale de l'anse son plan et le plan xy sont perpendiculaires entre eux. Désignons par Φ l'angle de rotation de l'anse à partir de sa position initiale et admettons que $\Phi > 0$ si l'anse s'écarte vers la gauche lorsqu'on la regarde du côté de la partie positive de l'axe x. Si $\vartheta = 0$, le chariot C se trouve au milieu de l'anse; si $\vartheta = 0$ et $\Phi = 0$, le plan de l'anneau intérieur de la suspension se confond avec le plan xy.

Installons le boîtier de la suspension par bicardan à bord du navire de telle sorte que le plan xy soit parallèle au pont et que l'axe y ait la direction de l'axe longitudinal du navire. Si l'on stabilise à l'horizontale le plan de l'anneau intérieur de la suspension par bicardan, les angles ϑ et Φ détermineront, de même que le font les angles θ et ψ de la première suspension à la cardan (v. fig. 3, *a* et 4) ou les angles θ^* et ψ^* de la seconde suspension (v. fig. 3, *b* et 5), la position du pont du navire par rapport au plan horizontal (à condition bien entendu que les anneaux intérieurs de ces deux suspensions les plus simples soient stabilisés à l'horizontale). En navigation maritime, les angles ϑ et Φ enregistrés par une suspension par bicardan sont respectivement appelés angle de *roulis* et angle de *tangage*. Proposons-nous d'établir les relations qui relient ces angles à la bande θ et à l'assiette ψ du navire définies plus haut. La première suspension à la cardan (v. fig. 3, *a*) est identique à la partie de la suspension par bicardan constituée par les anneaux extérieur et intérieur (v. fig. 7). A une bande positive θ du navire correspond la rotation de l'anneau extérieur de la première suspension par rapport au pont dans le sens des aiguilles d'une montre si on regarde cet anneau du côté de l'avant du navire (son tribord s'abaisse). En même temps, pour une valeur positive de l'angle de roulis ϑ, l'anneau extérieur de la suspension par bicardan est tourné à partir de sa position initiale en sens inverse des aiguilles d'une montre. Il s'ensuit que

$$\vartheta = -\theta, \tag{1.2.1}$$

c'est-à-dire que l'angle de roulis et la bande du navire, tels que définis précédemment, sont numériquement égaux mais de signes contraires.

L'angle de tangage Φ caractérise la rotation de l'anse à partir de sa position initiale (perpendiculaire au plan xy et maintenant au pont) dans une position telle que l'axe de la barre B, constamment contenu dans le plan de l'anse, devient vertical. C'est exactement du même angle mais désigné précédemment par ψ^* que tourne l'anneau extérieur de la seconde suspension à la cardan (v. fig. 3, *b*) si son anneau intérieur devient horizontal. En effet, le plan $x_1^*z_1^*$ passant par l'axe x_1^* perpendiculairement au plan $x_1^*y_1^*$ de l'anneau extérieur de cette suspension (v. fig. 5) contient toujours une perpendiculaire au plan de l'anneau intérieur (axe ζ^*), c'est-à-dire une droite verticale. Par conséquent, le plan $x_1^*z_1^*$ est orienté de la même façon que le plan de l'anse. Puisqu'à des valeurs positives des angles Φ et ψ^* correspondent les rotations, de même sens, de l'anse et de l'anneau extérieur de la seconde suspension, on a

$$\Phi = \psi^*. \tag{1.2.2}$$

En partant des égalités (1.2.1), (1.2.2) et de la deuxième formule (1.1.9), nous obtenons la relation

$$\operatorname{tg} \Phi = \operatorname{tg} \psi \sec \vartheta \qquad (1.2.3)$$

qui permet de faire disparaître les fonctions trigonométriques de l'angle ψ dans la table (1.1.4). Il est aisé de vérifier que la relation (1.2.3) entraîne les formules

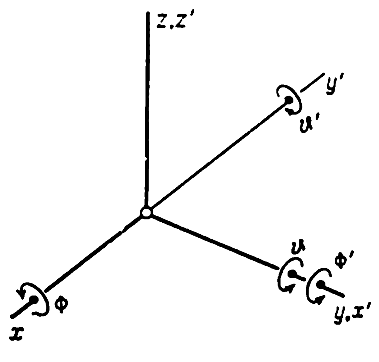


Fig. 8

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \frac{1}{R} \sin \Phi \cos \vartheta, \\ \cos \psi &= \frac{1}{R} \cos \Phi, \end{aligned} \qquad (1.2.4)$$

où

$$R = \sqrt{1 - \sin^2 \Phi \sin^2 \vartheta}. \qquad (1.2.5)$$

Lorsque les valeurs des angles Φ et ϑ sont petites, le radical R est très proche de l'unité. Si par exemple, $\Phi = 7°$ et $\vartheta = 15°$, on a $R = 0{,}99950$.

En tenant compte des formules (1.2.4) et de l'égalité (1.2.1), on peut mettre la table (1.1.4) sous la forme suivante:

	x	y	z
ξ	$\cos \vartheta$	0	$-\sin \vartheta$
η	$\frac{1}{R} \sin \Phi \sin \vartheta \cos \vartheta$	$\frac{1}{R} \cos \Phi$	$\frac{1}{R} \sin \Phi \cos^2 \vartheta$
ζ	$\frac{1}{R} \cos \Phi \sin \vartheta$	$-\frac{1}{R} \sin \Phi \cos \vartheta$	$\frac{1}{R} \cos \Phi \cos \vartheta.$

(1.2.6)

Dans cette dernière table, les cosinus des angles que forment les axes des systèmes de coordonnées xyz et $\xi\eta\zeta$ liés respectivement au boîtier de la suspension par bicardan et à son anneau intérieur, sont exprimés par l'intermédiaire des angles de roulis et de tangage ϑ et Φ. Il est aisé de s'assurer d'après la table (1.2.6) que les axes des systèmes $\xi\eta\zeta$ et xyz se confondent respectivement lorsque $\Phi = \vartheta = 0$.

Les quantités Φ et ϑ (au signe près) figurent de façon symétrique dans les expressions des cosinus des angles que l'axe ζ fait avec les axes x, y et z dans la table (1.2.6). Par raison de cette symétrie, le plan de l'anneau intérieur de la suspension par bicardan sera encore horizontal si l'on fait tourner le boîtier autour de l'axe z de 90° en sens inverse des aiguilles d'une montre (fig. 8) et qu'on fait tourner ensuite l'anse d'un angle

$$\Phi' = \vartheta \qquad (1.2.7)$$

et l'anneau extérieur d'un angle

$$\vartheta' = -\Phi. \tag{1.2.8}$$

En effet, désignons par $\xi'\eta'\zeta'$ et $x'y'z'$ les systèmes de coordonnées $\xi\eta\zeta$ et xyz dans leur nouvelle orientation qu'ils ont prise après que le boîtier de la suspension a tourné de 90° et l'anse et l'anneau extérieur ont tourné respectivement des angles Φ' et ϑ' à partir de leurs positions initiales. Pour obtenir la table des cosinus des angles formés par les axes de ces systèmes, il suffit en toute évidence d'affecter de prime toutes les désignations dans la table (1.2.6). Il vient

	x'	y'	z'
ξ'	$\cos\vartheta'$	0	$-\sin\vartheta'$
η'	$\frac{1}{R'}\sin\Phi'\sin\vartheta'\cos\vartheta'$	$\frac{1}{R'}\cos\Phi'$	$\frac{1}{R'}\sin\Phi'\cos^2\vartheta'$
ζ'	$\frac{1}{R'}\cos\Phi'\sin\vartheta'$	$-\frac{1}{R'}\sin\Phi'\cos\vartheta'$	$\frac{1}{R'}\cos\Phi'\cos\vartheta'$,

(1.2.9)

où

$$R' = \sqrt{1-\sin^2\Phi'\sin^2\vartheta'}. \tag{1.2.10}$$

En vertu des égalités (1.2.7) et (1.2.8), remplaçons dans la table (1.2.9) les angles Φ' et ϑ' respectivement par ϑ et $-\Phi$ et remarquons que suivant (1.2.5) on a

$$R' = R. \tag{1.2.11}$$

Nous obtenons

	x'	y'	z'
ξ'	$\cos\Phi$	0	$\sin\Phi$
η'	$-\frac{1}{R}\sin\Phi\cos\Phi\sin\vartheta$	$\frac{1}{R}\cos\vartheta$	$\frac{1}{R}\cos^2\Phi\sin\vartheta$
ζ'	$-\frac{1}{R}\sin\Phi\cos\vartheta$	$-\frac{1}{R}\cos\Phi\sin\vartheta$	$\frac{1}{R}\cos\Phi\cos\vartheta$.

(1.2.12)

En utilisant maintenant la table des cosinus des angles formés par les axes des systèmes $x'y'z'$ et xyz (v. fig. 8)

	x	y	z
x'	0	1	0
y'	-1	0	0
z'	0	0	1,

(1.2.13)

construisons la table des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes $\xi'\eta'\zeta'$ et xyz. Il vient

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ \xi' & 0 & \cos\Phi & \sin\Phi \\ \eta' & -\frac{1}{R}\cos\vartheta & -\frac{1}{R}\sin\Phi\cos\Phi\sin\vartheta & \frac{1}{R}\cos^2\Phi\sin\vartheta \\ \zeta' & \frac{1}{R}\cos\Phi\sin\vartheta & -\frac{1}{R}\sin\Phi\cos\vartheta & \frac{1}{R}\cos\Phi\cos\vartheta. \end{array} \quad (1.2.14)$$

Cette table détermine l'orientation de l'anneau intérieur de la suspension par bicardan après sa rotation, par rapport à la position initiale de son boîtier.

Le rapprochement entre les tables (1.2.14) et (1.2.6) montre que les cosinus des angles que les axes ζ et ζ' forment avec les axes x, y et z sont respectivement égaux. Ceci signifie que ces axes sont parallèles et que le plan $\xi'\eta'$ est un plan horizontal. La propriété que possède une suspension par bicardan de maintenir le plan de son anneau intérieur dans la position horizontale lorsque son boîtier tourne de 90° est donc démontrée. Bien entendu, les valeurs des angles de rotation de l'anse et de l'anneau extérieur sont dans ce cas intervertie conformément aux formules (1.2.7) et (1.2.8). Le même résultat peut être obtenu par voie purement géométrique si l'on remarque que, lorsque l'anneau intérieur de la suspension par bicardan occupe une position horizontale, les angles Φ et ϑ sont des mesures des dièdres respectifs entre les plans verticaux passant par les axes x et y et les plans xz et yz.

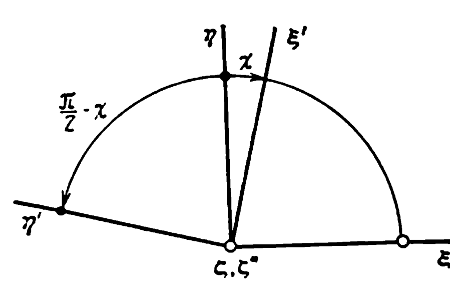


Fig. 9

Il n'est pas difficile de se convaincre que, lorsque les angles Φ et ϑ ne sont pas simultanément nuls, les axes ξ' et η' ne sont pas perpendiculaires respectivement aux axes ξ et η. En effet, il suit des tables (1.2.6) et (1.2.14) que

$$\cos(\widehat{\xi, \xi'}) = \cos(\widehat{\xi, x})\cos(\widehat{x, \xi'}) + \cos(\widehat{\xi, y})\cos(\widehat{y, \xi'}) + \\ + \cos(\widehat{\xi, z})\cos(\widehat{z, \xi'}) = -\sin\Phi\sin\vartheta. \quad (1.2.15)$$

D'autre part, (fig. 9),

$$\sin\chi = \cos(\widehat{\xi, \xi'}). \quad (1.2.16)$$

Par suite,

$$\sin \chi = -\sin \Phi \sin \vartheta. \qquad (1.2.17)$$

Si l'on y remplace, suivant les formules (1.2.1) et (1.2.2), les angles ϑ et Φ respectivement par $-\theta$ et ψ^*, on obtient de nouveau la formule (1.1.12) donnant l'erreur de cardan.

§ 3. Sur la rotation relative de deux plates-formes stabilisées au roulis et au tangage du navire

Au premier paragraphe du présent chapitre il a été montré que, si deux suspensions à la cardan sont montées à bord d'un navire de telle sorte que les axes de leurs anneaux extérieurs sont parallèles au pont et perpendiculaires entre eux et que les plans des anneaux intérieurs sont stabilisés à l'horizontale, alors les anneaux intérieurs de ces suspensions seront animés, lors du roulis ou du tangage du navire, d'une rotation l'un par rapport à l'autre. L'angle de rotation correspondant peut être calculé par la formule exacte (1.1.13) ou à l'aide des formules approchées (1.1.14) et (1.1.15). Le présent paragraphe étudie une question analogue dans le cas où les axes y et y' des anneaux extérieurs de deux suspensions à la cardan forment entre eux un angle arbitraire φ (fig. 10).

Fig. 10

Ainsi, soient deux suspensions à la cardan dont les axes des anneaux extérieurs sont parallèles au pont du navire (ou à un autre plan quelconque lié au mobile). Désignons par x, y et z les axes du système de coordonnées lié au boîtier de la première suspension et par x', y' et z' les axes du système associé au boîtier de la seconde. Les plans xy et $x'y'$ sont parallèles au pont, les axes y et y' étant dirigés comme il a déjà été dit, suivant les axes des anneaux extérieurs. Par ailleurs, désignons par ξ, η et ζ les axes du système de coordonnées, liés à l'anneau intérieur de la première suspension et confondus respectivement avec les axes x, y et z lorsque cette suspension occupe sa position initiale, c'est-à-dire lorsque les plans des anneaux extérieur et intérieur sont parallèles au plan du pont ou, ce qui revient au même, au plan xy.

Désignons par θ l'angle de rotation de l'anneau extérieur de la première suspension à partir de sa position initiale. Admettons, de même qu'au § 1, que $\theta > 0$ si l'anneau extérieur tourne de sa position initiale dans le sens des aiguilles d'une montre (lorsqu'on le

regarde du côté de la partie positive de l'axe y, v. fig. 4). Désignons par ψ l'angle de rotation de l'anneau intérieur par rapport à l'anneau extérieur et considérons que $\psi > 0$ si cet anneau tourne en sens inverse des aiguilles d'une montre (lorsque cette rotation est observée du côté de la partie positive de l'axe ξ).

La table des cosinus des angles formés par les axes des systèmes de coordonnées $\xi\eta\zeta$ et xyz a la même forme que la table (1.1 4), à savoir

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ \xi & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ \eta & -\sin\theta\sin\psi & \cos\psi & \cos\theta\sin\psi \\ \zeta & -\sin\theta\cos\psi & -\sin\psi & \cos\theta\cos\psi. \end{array} \qquad (1.3.1)$$

En plus du système de coordonnées $x'y'z'$ lié au boîtier de la seconde suspension, introduisons un système $\xi'\eta'\zeta'$ lié à son anneau intérieur et désignons par θ' et ψ' les angles de rotation respectifs des anneaux extérieur et intérieur en gardant pour ces angles les mêmes règles des signes que pour les angles θ et ψ.

La table des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes $\xi'\eta'\zeta'$ et $x'y'z'$ est construite de la même manière que la table (1.3.1). On a

$$\begin{array}{cccc} & x' & y' & z' \\ \xi' & \cos\theta' & 0 & \sin\theta' \\ \eta' & -\sin\theta'\sin\psi' & \cos\psi' & \cos\theta'\sin\psi' \\ \zeta' & -\sin\theta'\cos\psi' & -\sin\psi' & \cos\theta'\cos\psi'. \end{array} \qquad (1.3.2)$$

Ainsi qu'on l'a dit plus haut, les plans xy et $x'y'$ sont parallèles, et l'angle des axes y et y' ou, ce qui revient au même, des axes x et x' a une valeur donnée φ (v. fig. 10). Par suite, la table des cosinus des angles formés par les axes des systèmes xyz et $x'y'z'$ est de la forme suivante:

$$\begin{array}{cccc} & x' & y' & z' \\ x & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ y & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ z & 0 & 0 & 1. \end{array} \qquad (1.3.3)$$

Les plans $\xi\eta$ et $\xi'\eta'$ des anneaux intérieurs des deux suspensions sont, eux aussi, parallèles d'après les hypothèses du problème. Désignons par σ, l'angle, pour le moment inconnu, que font entre eux les axes ξ et ξ' (fig. 11). La table des cosinus des angles formés par les axes des systèmes de coordonnées $\xi\eta\zeta$ et $\xi'\eta'\zeta'$ est analogue à la

table (1.3.3),

$$\begin{array}{cccc} & \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi & \cos\sigma & \sin\sigma & 0 \\ \eta & -\sin\sigma & \cos\sigma & 0 \\ \zeta & 0 & 0 & 1. \end{array} \qquad (1.3.4)$$

Il est évident que si $\theta = \psi = 0$, on a $\sigma = \varphi$ et bien entendu $\theta' = \psi' = 0$. En effet, les axes des systèmes $\xi\eta\zeta$ et xyz, ainsi que ceux des systèmes $\xi'\eta'\zeta'$ et $x'y'z'$ sont dans ce cas respectivement parallèles.

Lorsque les angles θ et ψ sont différents de zéro, l'angle σ n'est pas égal à l'angle φ ; la différence

$$\chi = \sigma - \varphi \qquad (1.3.5)$$

définit un angle supplémentaire dont l'anneau intérieur de la seconde suspension tourne par rapport à celui de la première (dans le sens des aiguilles d'une montre pour $\chi > 0$, si la rotation est observée d'en haut).

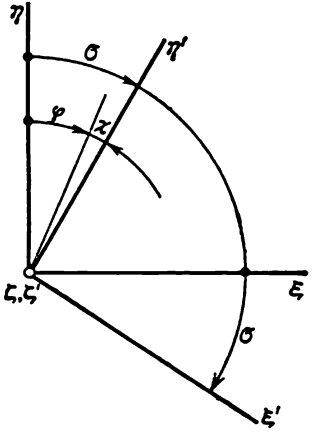


Fig. 11

Dans ce qui suit, nous nous proposons de déterminer la valeur de χ en fonction des angles θ, ψ et φ. Comme les angles θ et ψ relatifs à la première suspension se déterminent univoquement en fonction de θ', ψ' et φ, on peut exprimer au besoin l'angle χ par l'intermédiaire des angles θ', ψ' et φ.

Pour résoudre le problème posé, construisons par deux procédés la table des cosinus des angles formés par les axes des systèmes de coordonnées $\xi\eta\zeta$ et $x'y'z'$, une fois à l'aide des tables (1.3.3) et (1.3.1) et une autre fois à l'aide des tables (1.3.4) et (1.3.2). Ainsi, en partant des tables (1.3.3) et (1.3.1) nous obtenons

$$\cos(\widehat{\eta, y'}) = \cos(\widehat{\eta, x})\cos(\widehat{x, y'}) + \cos(\widehat{\eta, y})\cos(\widehat{y, y'}) + \\ + \cos(\widehat{\eta, z})\cos(\widehat{z, y'}) = -\sin\theta\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi \qquad (1.3.6)$$

et, en partant des tables (1.3.4) et (1.3.2),

$$\cos(\widehat{\eta, y'}) = \cos(\widehat{\eta, \xi'})\cos(\widehat{\xi', y'}) + \cos(\widehat{\eta, \eta'})\cos(\widehat{\eta', y'}) + \\ + \cos(\widehat{\eta, \zeta'})\cos(\widehat{\zeta', y'}) = \cos\psi'\cos\sigma. \qquad (1.3.7)$$

On a finalement la table cherchée sous deux formes suivantes:

$$\begin{array}{cccc}
 & x' & y' & z' \\
\xi & \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta \\
\eta & -\sin\theta\sin\psi\cos\varphi- & -\sin\theta\sin\psi\sin\varphi+ & \cos\theta\sin\psi \\
 & -\cos\psi\sin\varphi & +\cos\psi\cos\varphi & \\
\zeta & -\sin\theta\cos\psi\cos\varphi+ & -\sin\theta\cos\psi\sin\varphi- & \cos\theta\cos\psi \\
 & +\sin\psi\sin\varphi & -\sin\psi\cos\varphi &
\end{array} \qquad (1.3.8)$$

et

$$\begin{array}{cccc}
 & x' & y' & z' \\
\xi & -\sin\theta'\sin\psi'\sin\sigma+ & \cos\psi'\sin\sigma & \cos\theta'\sin\psi'\sin\sigma+ \\
 & +\cos\theta'\cos\sigma & & +\sin\theta'\cos\sigma \\
\eta & -\sin\theta'\sin\psi'\cos\sigma- & \cos\psi'\cos\sigma & \cos\theta'\sin\psi'\cos\sigma- \\
 & -\cos\theta'\sin\sigma & & -\sin\theta'\sin\sigma \\
\zeta & -\sin\theta'\cos\psi' & -\sin\psi' & \cos\theta'\cos\psi'.
\end{array} \qquad (1.3.9)$$

En comparant, dans les tables (1.3.8) et (1.3.9), les cosinus des angles faits par l'axe ζ avec les axes x', y' et z', nous obtenons trois égalités:

$$\begin{aligned}
-\sin\theta\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi &= -\sin\theta'\cos\psi'\,; \\
-\sin\theta\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi &= -\sin\psi'\,; \\
\cos\theta\cos\psi &= \cos\theta'\cos\psi'
\end{aligned} \qquad (1.3.10)$$

dont chacune est une conséquence de deux autres. Ces égalités permettent en particulier de calculer les angles θ' et ψ' d'après les valeurs données des angles θ, ψ et φ.

En supposant que les angles θ et ψ et donc les angles θ' et ψ' sont petits, on peut obtenir, au lieu de deux premières égalités exactes (1.3.10), les formules approchées suivantes:

$$\theta' = \theta\cos\varphi - \psi\sin\varphi\,; \quad \psi' = \theta\sin\varphi + \psi\cos\varphi \qquad (1.3.11)$$

qui sont valables à des termes de deuxième ordre en θ et ψ près. Puis, en comparant dans les tables (1.3.8) et (1.3.9) les cosinus des angles formés par les axes ξ et y', nous obtenons la relation

$$\cos\theta\sin\varphi = \cos\psi'\sin\sigma \qquad (1.3.12)$$

qui permet de déterminer, d'après les angles connus φ, θ et ψ', la valeur exacte de l'angle σ des axes ξ et ξ' (ou, ce qui revient au même, des axes η et η').

Remarquons qu'à des termes de deuxième ordre en θ et ψ' près, on a

$$\frac{\cos\theta}{\cos\psi'} = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}\psi'^2. \qquad (1.3.13)$$

Par suite, en vertu de la relation (1.3.12) on a avec la même précision

$$\sin\sigma = \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}\psi'^2\right)\sin\varphi. \qquad (1.3.14)$$

Il en résulte que l'angle σ diffère de l'angle φ par une quantité de deuxième ordre en θ et ψ'. Suivant la formule (1.3.5), l'angle χ, c'est-à-dire la différence des angles σ et φ, est de même ordre et donc on a, avec la même précision, l'égalité suivante:

$$\sin\sigma = \sin(\varphi + \chi) = \sin\varphi + \chi\cos\varphi. \qquad (1.3.15)$$

La comparaison des égalités (1.3.14) et (1.3.15) donne la relation

$$\chi\cos\varphi = \frac{1}{2}(\psi'^2 - \theta^2)\sin\varphi. \qquad (1.3.16)$$

Introduisons dans cette relation au lieu de ψ' son expression par les angles θ, ψ et φ suivant la deuxième formule (1.3.11). Après quelques transformations évidentes nous obtenons en définitive la formule

$$\chi = \frac{1}{4}(\psi^2 - \theta^2)\sin 2\varphi + \theta\psi\sin^2\varphi \qquad (1.3.17)$$

qui fournit la solution du problème posé.

Exemple numérique.— Soient par exemple $\theta = 15°$, $\psi = 7°$, $\varphi = -45°$. En effectuant pour ces valeurs numériques les calculs au moyen de la formule (1.3.17), nous obtenons $\chi = 0{,}02940$ (1°41,1'). Si les calculs sont faits à l'aide des relations exactes (1.3.10) et (1.3.12), on obtient pour l'angle σ la valeur de 0,75618 (43°19.5') et pour l'angle χ, suivant la formule (1.3.5), la valeur de 0.02922 (1°40.5').

Pour $\varphi = \pi/2$, c'est-à-dire lorsque les axes des anneaux extérieurs des deux suspensions à la cardan sont perpendiculaires l'un par rapport à l'autre, la formule (1.3.17) se ramène à la forme

$$\chi = \theta\psi \qquad (1.3.18)$$

et, comme il fallait s'y attendre, coïncide avec la formule (1.1.14) pour l'erreur de cardan obtenue au § 1 du présent chapitre.

Les formules du type (1.3.17) se rencontrent souvent lors de la résolution des problèmes relatifs à la détermination de l'orientation des mobiles. Ceci signifie qu'à l'aide de suspensions à la cardan imaginaires, convenablement liées au mobile, de tels problèmes peuvent être ramenés à celui que nous venons de considérer (v. par exemple chap. III, § 1).

§ 4. Erreurs dans l'enregistrement de la bande, de l'assiette et du cap, dues au montage incorrect des suspensions à la cardan

D'après ce qui a été établi au § 1 du présent chapitre, pour pouvoir enregistrer directement la bande, l'assiette et le cap d'un navire ou d'un autre véhicule, il faut que ce dernier soit porteur d'une suspension à la cardan dont le plan de l'anneau intérieur doit être maintenu dans le plan horizontal. Le boîtier de la suspension est à installer de telle sorte que l'axe de l'anneau extérieur soit parallèle à l'axe longitudinal du navire et le plan de la base du boîtier soit parallèle au pont. Comme au § 1, associons au boîtier de la suspension un système de coordonnées xyz (fig. 12) en plaçant son origine au centre géométrique de la suspension. Dirigeons l'axe y de ce système suivant l'axe de l'anneau extérieur de la suspension et admettons que le plan xy est parallèle à la base du boîtier. Attachons, par ailleurs, à l'anneau intérieur un système de coordonnées $\xi\eta\zeta$; orientons les axes ξ et η de ce système dans le plan horizontal de l'anneau intérieur de telle sorte que l'anneau intérieur puisse tourner autour de l'axe ξ par rapport à l'anneau extérieur. Rappelons que l'angle θ que l'axe ξ fait avec l'axe x est appelé la bande du navire et que l'angle ψ des axes η et y est son assiette ; l'angle θ est positif lorsque le navire donne de la bande sur tribord ; l'angle ψ est positif lorsque l'avant du navire est abaissé et son arrière est surélevé ; le cap $\varkappa$ du navire est compté dans le sens des aiguilles d'une montre à partir de la direction Nord jusqu'à l'axe η qui est la ligne de foi du navire (fig. 13).

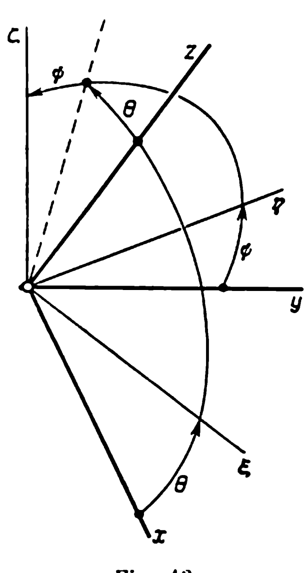


Fig. 12

Installons à bord du navire une seconde suspension à la cardan ayant la même construction et la même orientation du boîtier que dans le cas de la première que nous venons de décrire. Désignons par $x'y'z'$ et $\xi'\eta'\zeta'$ des systèmes de coordonnées analogues aux systèmes xyz et $\xi\eta\zeta$, qui sont liés respectivement au boîtier et à l'anneau intérieur de la seconde suspension. Il est pratiquement impossible de monter la seconde suspension de manière que sa base soit strictement parallèle à celle de la première et que les axes de leurs anneaux extérieurs soient, eux aussi, rigoureusement parallè-

les. Une des causes en est, en particulier, la flexibilité élastique du véhicule porteur lui-même.

Si le plan $\xi'\eta'$ de l'anneau intérieur est maintenu horizontal, on peut mesurer la bande, l'assiette et le cap du navire également à l'aide de la seconde suspension. Il est évident que par suite d'un écart angulaire que les boîtiers des suspensions présentent l'un par rapport à l'autre, les valeurs de θ', ψ' et $\varkappa'$ seront, dans le cas général, différentes des valeurs de θ, ψ et $\varkappa$, c'est-à-dire de la bande, de l'assiette et du cap, enregistrées à l'aide de la première suspension. Il est facile de voir (fig. 13) que la différence

$$\gamma = \varkappa' - \varkappa \qquad (1.4.1)$$

est l'angle que font entre eux les axes η et η' liés respectivement aux axes des anneaux intérieurs de la première et de la seconde suspension.

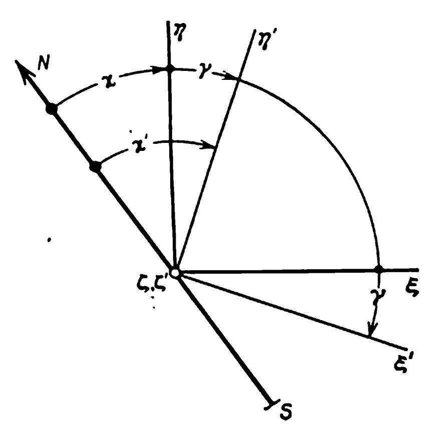


Fig. 13

Pour mesurer l'écart angulaire relatif aux boîtiers des deux suspensions à la cardan, on peut utiliser les valeurs que prennent les angles θ', ψ' et γ lorsque le plan $\xi\eta$ de l'anneau intérieur de la première suspension vient coïncider avec le plan xy parallèle à la base de son boîtier, c'est-à-dire lorsque $\theta = \psi = 0$. Désignons-les respectivement par θ^0, ψ^0 et γ^0. Elles déterminent la rotation finie que doit effectuer le boîtier de la seconde suspension autour d'une certaine droite pour que les axes du système $x'y'z'$ qui lui est lié soient parallèles aux axes de même nom du système xyz associé au boîtier de la première suspension. Cette rotation finie est le résultat de trois rotations finies consécutives (fig. 14) du boîtier de la seconde suspension : d'abord de l'angle θ^0 autour de l'axe y' dans le sens des aiguilles d'une montre, de sorte que l'axe x' se trouve parallèle au plan xy lié à la première suspension ; puis, de l'angle ψ^0 autour de la nouvelle position de l'axe x' en sens inverse des aiguilles d'une montre, de sorte que l'axe z' devient parallèle à l'axe z de la première suspension ; enfin, de l'angle γ^0 autour de cette nouvelle position de l'axe z' en sens inverse des aiguilles d'une montre. Ainsi, les axes x', y', z' deviennent respectivement parallèles aux axes x, y, z et l'écart angulaire de la seconde suspension par rapport à la première se trouve éliminé.

Proposons-nous maintenant d'établir des relations qui permettent de déterminer les valeurs de θ', ψ' et $\varkappa'$ d'après les valeurs don-

nées de θ, ψ, $\varkappa$ et de θ^0, ψ^0, γ^0. La table des cosinus des angles formés par les axes des systèmes de coordonnées $\xi\eta\zeta$ et xyz associés à la première suspension se présente sous la même forme que la table (1.1.4) indiquée au § 1 du présent chapitre, soit

	x	y	z	
ξ	$\cos\theta$	0	$\sin\theta$	
η	$-\sin\theta\sin\psi$	$\cos\psi$	$\cos\theta\sin\psi$	(1.4.2)
ζ	$-\sin\theta\cos\psi$	$-\sin\psi$	$\cos\theta\cos\psi$.	

La table des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes de coordonnées $x'y'z'$ et $\xi'\eta'\zeta'$ liés respectivement au boîtier

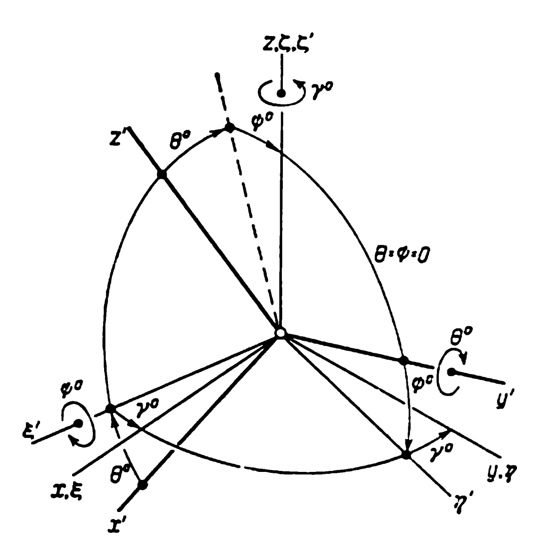


Fig. 14

et à l'anneau intérieur de la seconde suspension a, elle aussi, une forme analogue :

	x'	y'	z'	
ξ'	$\cos\theta'$	0	$\sin\theta'$	
η'	$-\sin\theta'\sin\psi'$	$\cos\psi'$	$\cos\theta'\sin\psi'$	(1.4.3)
ζ'	$-\sin\theta'\cos\psi'$	$-\sin\psi'$	$\cos\theta'\cos\psi'$.	

Les deux axes ζ et ζ' sont verticaux, donc parallèles. Par conséquent (v. fig. 13), la table des cosinus des angles formés par les axes

des systèmes $\xi\eta\zeta$ et $\xi'\eta'\zeta'$ s'écrit sous la forme

	ξ'	η'	ζ'
ξ	$\cos\gamma$	$\sin\gamma$	0
η	$-\sin\gamma$	$\cos\gamma$	0
ζ	0	0	$1.$

(1.4.4)

Ici, γ est l'angle, introduit précédemment, des axes η et η' (ou, ce qui revient au même, des axes ξ et ξ').

En faisant usage des tables (1.4.3) et (1.4.4), on peut établir la table des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes de coordonnées $\xi\eta\zeta$ et $x'y'z'$:

	x'	y'	z'
ξ	$-\sin\theta'\sin\psi'\sin\gamma+$ $+\cos\theta'\cos\gamma$	$\cos\psi'\sin\gamma$	$\cos\theta'\sin\psi'\sin\gamma+$ $+\sin\theta'\cos\gamma$
η	$-\sin\theta'\sin\psi'\cos\gamma-$ $-\cos\theta'\sin\gamma$	$\cos\psi'\cos\gamma$	$\cos\theta'\sin\psi'\cos\gamma-$ $-\sin\theta'\sin\gamma$
ζ	$-\sin\theta'\cos\psi'$	$-\sin\psi'$	$\cos\theta'\cos\psi'.$

(1.4.5)

Supposons maintenant que le navire prenne une position telle que les angles θ et ψ sont simultanément nuls. Dans ce cas, les axes des systèmes $\xi\eta\zeta$ et xyz se confondent respectivement, tandis que les angles θ', ψ' et γ prennent, comme il a été indiqué plus haut, les valeurs θ^0, ψ^0 et γ^0. La table des cosinus des angles formés par les axes des systèmes xyz et $x'y'z'$ peut donc s'obtenir à partir de la table (1.4.5) par un simple remplacement des désignations: ξ, η, ζ par x, y, z, et θ', ψ', γ par θ^0, ψ^0, γ^0. Il vient

	x'	y'	z'
x	$-\sin\theta^0\sin\psi^0\sin\gamma^0+$ $+\cos\theta^0\cos\gamma^0$	$\cos\psi^0\sin\gamma^0$	$\cos\theta^0\sin\psi^0\sin\gamma^0+$ $+\sin\theta^0\cos\gamma^0$
y	$-\sin\theta^0\sin\psi^0\cos\gamma^0-$ $-\cos\theta^0\sin\gamma^0$	$\cos\psi^0\cos\gamma^0$	$\cos\theta^0\sin\psi^0\cos\gamma^0-$ $-\sin\theta^0\sin\gamma^0$
z	$-\sin\theta^0\cos\psi^0$	$-\sin\psi^0$	$\cos\theta^0\cos\psi^0.$

(1.4.6)

D'après la table (1.4.3) on a

$$\cos(\widehat{\zeta', y'}) = -\sin\psi'. \tag{1.4.7}$$

L'axe ζ' étant parallèle à l'axe ζ, il vient

$$\cos(\widehat{\zeta', y'}) = \cos(\widehat{\zeta, y'}) = \cos(\widehat{\zeta, x})\cos(\widehat{x, y'}) + \\ + \cos(\widehat{\zeta, y})\cos(\widehat{y, y'}) + \cos(\widehat{\zeta, z})\cos(\widehat{z, y'}). \quad (1.4.8)$$

En utilisant maintenant les données des tables (1.4.2) et (1.4.6), nous obtenons

$$\sin\psi' = \sin\theta\cos\psi\cos\psi^0\sin\gamma^0 + \sin\psi\cos\psi^0\cos\gamma^0 + \\ + \cos\theta\cos\psi\sin\psi^0. \quad (1.4.9)$$

D'une manière analogue,

$$\cos(\widehat{\zeta', x'}) = -\sin\theta'\cos\psi' \quad (1.4.10)$$

et

$$\cos(\widehat{\zeta', x'}) = \cos(\widehat{\zeta, x'}) = \cos(\widehat{\zeta, x})\cos(\widehat{x, x'}) + \\ + \cos(\widehat{\zeta, y})\cos(\widehat{y, x'}) + \cos(\widehat{\zeta, z})\cos(\widehat{z, x'}), \quad (1.4.11)$$

d'où

$$\sin\theta'\cos\psi' = \sin\theta\cos\psi(\cos\theta^0\cos\gamma^0 - \\ - \sin\theta^0\sin\psi^0\sin\gamma^0) + \sin\psi(-\cos\theta^0\sin\gamma^0 - \\ - \sin\theta^0\sin\psi^0\cos\gamma^0) + \cos\theta\cos\psi\sin\theta^0\cos\psi^0. \quad (1.4.12)$$

Les relations (1.4.9) et (1.4.12) permettent de déterminer successivement les angles θ' et ψ' d'après les valeurs données de θ, ψ, θ^0, ψ^0 et γ^0. Pour calculer la valeur de l'angle γ, tenons compte de ce que suivant la table (1.4.5),

$$\cos(\widehat{y', \xi}) = \cos\psi'\sin\gamma. \quad (1.4.13)$$

D'autre part, on a

$$\cos(\widehat{y', \xi}) = \cos(\widehat{y', x})\cos(\widehat{x, \xi}) + \cos(\widehat{y', y})\cos(\widehat{y, \xi}) + \\ + \cos(\widehat{y', z})\cos(\widehat{z, \xi}). \quad (1.4.14)$$

Ainsi, compte tenu des données des tables (1.4.2) et (1.4.6), nous obtenons

$$\cos\psi'\sin\gamma = \cos\theta\cos\psi^0\sin\gamma^0 - \sin\theta\sin\psi^0. \quad (1.4.15)$$

A partir de cette relation on peut trouver l'angle γ en déterminant au préalable l'angle ψ' à l'aide de la relation (1.4.9). Pour rechercher

la valeur de $\varkappa'$, il convient de se servir maintenant de la formule (1.4.1).

Si l'on utilise à bord du navire deux suspensions à la cardan fonctionnant en commun, on effectue généralement une *opération* dite *de mise en accord des échelles*. Plus précisément, on prend pour bande, assiette et cap enregistrés par la seconde suspension les valeurs de θ', ψ' et $\varkappa'$ diminuées de θ^0, ψ^0 et γ^0 (c'est-à-dire des valeurs que les angles θ', ψ' et $\varkappa'$ prennent pour $\theta = \psi = 0$). En conséquence, les différences

$$\theta^* = \theta' - \theta^0, \quad \psi^* = \psi' - \psi^0, \quad \varkappa^* = \varkappa' - \gamma^0 \tag{1.4.16}$$

sont appelées dans ce cas la bande, l'assiette et le cap du navire enregistrés par la seconde suspension après la mise en accord de ses échelles avec les échelles de la première suspension. Lorsque la bande θ et l'assiette ψ mesurées par la première suspension sont simultanément nulles, les valeurs de θ^* et ψ^* deviennent, elles aussi, nulles parce que dans ce cas, comme il vient d'être indiqué, les angles θ' et ψ' prennent eux-mêmes les valeurs θ^0 et ψ^0. Quant à la quantité $\varkappa^*$, elle devient, suivant la troisième égalité (1.4.16) et l'égalité (1.4.1) (dans laquelle γ doit être remplacée par sa valeur γ^0), égale au cap $\varkappa$ du navire mesuré pour $\theta = \psi = 0$ au moyen de la première suspension à la cardan. Si $\theta^0 = \psi^0 = \gamma^0 = 0$, c'est-à-dire si l'écart angulaire du boîtier de la seconde suspension par rapport à celui de la première est nul, les angles θ^*, ψ^* et $\varkappa^*$ coïncident respectivement avec θ', ψ' et $\varkappa'$, ces derniers étant égaux à θ, ψ et $\varkappa$ quels que soient la bande θ, l'assiette ψ et bien entendu le cap $\varkappa$. Mais dans le cas général où toutes les quantités θ, ψ, θ^0, ψ^0 et γ^0 (ou au moins certaines d'elles) sont différentes de zéro, la bande θ^*, l'assiette ψ^* et le cap $\varkappa^*$ mesurés au moyen de la seconde suspension à la cardan (compte tenu de la mise en accord des échelles) diffèrent un peu de la bande θ, de l'assiette ψ et du cap $\varkappa$ mesurés par la première suspension. Les différences

$$\Delta\theta = \theta^* - \theta; \quad \Delta\psi = \psi^* - \psi \tag{1.4.17}$$

et

$$\Delta\varkappa = \varkappa^* - \varkappa \tag{1.4.18}$$

sont appelées *erreurs* dans l'indication de la bande, de l'assiette et du cap du navire par la seconde suspension à la cardan, dues à l'installation imparfaite de son boîtier (malgré la mise en accord des échelles). Dans ces conditions, les valeurs de la bande θ, de l'assiette ψ et du cap $\varkappa$ indiquées par la première suspension sont prises pour valeurs vraies de ces paramètres.

D'après ce qui a été établi plus haut, les erreurs $\Delta\theta$, $\Delta\psi$ et $\Delta\varkappa$ ne s'annulent pour des valeurs quelconques de θ et ψ que si les angles θ^0, ψ^0 et γ^0 sont simultanément nuls, c'est-à-dire si les axes de

même nom des systèmes de coordonnées xyz et $x'y'z'$ liés aux boîtiers des suspensions à la cardan considérées sont rigoureusement parallèles. Par ailleurs, les erreurs mentionnées disparaissent dès que la bande θ et l'assiette ψ deviennent simultanément nulles et ceci quelles que soient les valeurs de θ^0, ψ^0 et γ^0. Par suite, le développement des erreurs $\Delta\theta$, $\Delta\psi$ et $\Delta\varkappa$ en série suivant les variables θ, ψ, θ^0, ψ^0 et γ^0 ne peut commencer que par des termes de deuxième ordre ou d'ordre supérieur contenant les produits des variables θ et ψ par les angles θ^0, ψ^0, γ^0. Ainsi, dans le cas où les angles θ et ψ varient dans des limites habituelles, c'est-à-dire sont loin de prendre des valeurs égales à $\pi/2$, on peut admettre que les erreurs $\Delta\theta$, $\Delta\psi$ et $\Delta\varkappa$ sont de même ordre (ou d'ordre supérieur) que les quantités θ^0, ψ^0 et γ^0. En tenant compte de ces remarques, passons maintenant à l'établissement des formules approchées permettant de représenter les erreurs $\Delta\theta$, $\Delta\psi$ et $\Delta\varkappa$ sous forme de fonctions dont les arguments sont les quantités θ, ψ, θ^0, ψ^0 et γ^0. D'abord, gardons dans les relations (1.4.9), (1.4.12) et (1.4.15) les seuls termes de premier ordre tirés des développements en série entière des fonctions trigonométriques de θ^0, ψ^0 et γ^0. Il en résulte les relations approchées suivantes:

$$\begin{aligned} \sin\psi' &= \sin\psi + \psi^0\cos\theta\cos\psi + \gamma^0\sin\theta\cos\psi, \\ \sin\theta'\cos\psi' &= \sin\theta\cos\psi + \theta^0\cos\theta\cos\psi - \gamma^0\sin\psi, \\ \cos\psi'\sin\gamma &= -\psi^0\sin\theta + \gamma^0\cos\theta. \end{aligned} \tag{1.4.19}$$

Sans compromettre la précision des calculs, on peut (en effectuant le développement en série de Taylor) y remplacer $\sin\gamma$ par l'angle γ, $\sin\psi'$ par la somme $\sin\psi + (\psi' - \psi)\cos\psi$ et procéder de la même façon pour les fonctions trigonométriques $\cos\psi'$ et $\sin\theta'$. Après quelques transformations simples, en rejetant de nouveau les termes de deuxième ordre en $\theta' - \theta$, $\psi' - \psi$, θ^0, ψ^0 et γ^0, nous obtenons les formules

$$\begin{aligned} \psi' - \psi &= \psi^0\cos\theta + \gamma^0\sin\theta, \\ \theta' - \theta &= \theta^0 + (\psi^0\sin\theta - \gamma^0\cos\theta)\operatorname{tg}\psi, \\ \gamma &= \frac{1}{\cos\psi}(-\psi^0\sin\theta + \gamma^0\cos\theta). \end{aligned} \tag{1.4.20}$$

Les égalités (1.4.1), (1.4.16), (1.4.17), (1.4.18) conduisent à

$$\theta' - \theta = \theta^0 + \Delta\theta, \quad \psi' - \psi = \psi^0 + \Delta\psi, \quad \gamma = \gamma^0 + \Delta\varkappa. \tag{1.4.21}$$

En utilisant ces dernières relations dans les formules (1.4.20), nous obtenons pour les erreurs $\Delta\theta$, $\Delta\psi$ et $\Delta\varkappa$ les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= (\psi^0\sin\theta - \gamma^0\cos\theta)\operatorname{tg}\psi, \\ \Delta\psi &= -\psi^0(1 - \cos\theta) + \gamma^0\sin\theta, \\ \Delta\varkappa &= -\psi^0\frac{\sin\theta}{\cos\psi} - \gamma^0\left(1 - \frac{\cos\theta}{\cos\psi}\right). \end{aligned} \tag{1.4.22}$$

Si maintenant dans les expressions (1.4.22) on développe en série les fonctions trigonométriques des arguments θ et ψ en ne gardant que des termes de premier et de deuxième ordre, on obtient les formules approchées suivantes:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \psi^0\theta\psi - \gamma^0\psi, \\ \Delta\psi &= \gamma^0\theta - \frac{1}{2}\psi^0\theta^2, \\ \Delta\varkappa &= -\psi^0\theta + \frac{1}{2}\gamma^0(\psi^2 - \theta^2). \end{aligned} \tag{1.4.23}$$

Exemple numérique.— Soient par exemple $\theta^0 = \psi^0 = \gamma^0 = 0{,}5°$; $\theta = 15°$; $\psi = 7°$. Les erreurs $\Delta\theta$, $\Delta\psi$ et $\Delta\varkappa$ calculées d'après les formules (1.4.23) ont les valeurs suivantes: $\Delta\theta = -0{,}0007870$ $(-2{,}7')$, $\Delta\psi = 0{,}001986$ $(6{,}8')$ et $\Delta\varkappa = -0{,}002519$ $(-8{,}7')$. Le calcul à l'aide des formules plus exactes (1.4.22) conduit pratiquement aux mêmes résultats, à savoir: $\Delta\theta = -0{,}0007577$ $(-2{,}6')$; $\Delta\psi = 0{,}001961$ $(6{,}7')$; $\Delta\varkappa = -0{,}002510$ $(-8{,}6')$. Si l'on veut connaître ces grandeurs avec une plus haute précision, on doit évidemment faire usage directement des relations exactes (1.4.9), (1.4.12) et (1.4.15). Compte tenu des égalités (1.4.1), (1.4.16), (1.4.17), (1.4.18), on obtient: $\Delta\theta = -0{,}0007534$ $(-2{,}6')$; $\Delta\psi = 0{,}001958$ $(6{,}7')$; $\Delta\varkappa = -0{,}002501$ $(-8{,}6')$.

En se donnant des valeurs maximales admissibles des erreurs $\Delta\theta$, $\Delta\psi$ et $\Delta\varkappa$ dans l'indication de la bande, de l'assiette et du cap, on peut déterminer à l'aide des formules (1.4.22) ou (1.4.23) les valeurs admissibles correspondantes de θ^0, ψ^0 et γ^0 qui ne doivent pas être dépassées lors du montage du boîtier de la seconde suspension par rapport à la première.

§ 5. Relations géométriques dans le système de deux suspensions à la cardan

Au cours du paragraphe précédent nous avons établi les formules exactes et approchées qui permettent de comparer les valeurs de la bande, de l'assiette et du cap du navire enregistrées par deux suspensions à la cardan identiques dont les boîtiers présentent, l'un par rapport à l'autre, un désalignement (en particulier de faible valeur) et dont les plans des anneaux intérieurs sont parallèles. Le présent paragraphe est destiné à étudier des questions relatives à la structure des relations établies précédemment, en partant tant des considérations analytiques que des considérations purement géométriques qui concernent la géométrie « interne » particulière du système de deux suspensions (à axes non parallèles des anneaux extérieurs).

Les questions de la géométrie des suspensions à la cardan ont été exposées surtout relativement à la navigation maritime. C'est pourquoi, pour fixer les idées, les deux plans des anneaux intérieurs des suspensions ($\xi\eta$ et $\xi'\eta'$) étaient supposés horizontaux. Il

n'est pas difficile de se convaincre que dans certains cas une telle hypothèse n'était pas substantielle. Dans le présent paragraphe, il suffit de poser que ces plans sont parallèles. Ceci étant, l'angle de rotation de l'anneau extérieur de chacune des suspensions à la cardan par rapport à son boîtier et l'angle de rotation de l'anneau intérieur par rapport à l'anneau extérieur, c'est-à-dire les quantités θ et θ', ψ et ψ', cessent dans ce cas de représenter la bande et l'assiette au sens propre de ces termes. La même remarque s'applique aux angles $\varkappa$ et $\varkappa'$ dont chacun était interprété comme cap du navire, c'est-à-dire comme un angle entre la direction du Nord et la

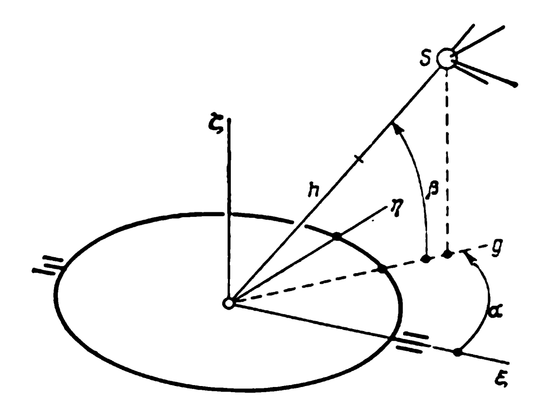


Fig. 15

ligne de foi du navire, cette dernière étant matérialisée par la projection de l'axe de l'anneau extérieur sur le plan de l'anneau intérieur de la suspension à la cardan correspondante.

Dans le cas général, au lieu des quantités $\varkappa$ et $\varkappa'$ il est plus commode de n'avoir affaire qu'à l'angle γ formé par les axes ξ et ξ' des anneaux intérieurs parallèles l'un à l'autre. Dans le cas où les plans $\xi\eta$ et $\xi'\eta'$ sont horizontaux, l'angle γ est égal à la différence entre les azimuts d'un même objet éloigné S mesurés à l'aide des suspensions à la cardan mentionnées. Ici, par *azimut* on entend l'angle que l'axe de l'anneau intérieur de la suspension à la cardan fait avec la projection sur le plan de cet anneau du rayon vecteur de S (angle α fait par l'axe ξ avec la droite g sur la fig. 15). L'angle γ peut être appelé angle de désadaptation en azimut ou tout simplement *désadaptation en azimut* de deux suspensions à la cardan.

En vertu des relations (1.4.9), (1.4.12) et (1.4.15) établies au paragraphe précédent, les angles θ', ψ' et γ peuvent être définis

par l'intermédiaire de $\theta, \psi, \theta^0, \psi^0$ et γ^0 à l'aide des égalités suivantes:

$$\begin{gathered}\sin \psi' = \sin \psi \cos \psi^0 \cos \gamma^0 + \cos \psi \cos \theta \sin \psi^0 + \\ + \sin \theta \cos \psi \cos \psi^0 \sin \gamma^0, \\ \sin \gamma = \frac{1}{\cos \psi'} (\cos \theta \cos \psi^0 \sin \gamma^0 - \sin \theta \sin \psi^0), \\ \sin \theta' = \frac{1}{\cos \psi'} [\sin \theta \cos \psi (\cos \theta^0 \cos \gamma^0 - \sin \theta^0 \sin \psi^0 \sin \gamma^0) - \\ - \sin \psi (\cos \theta^0 \sin \gamma^0 + \sin \theta^0 \sin \psi^0 \cos \gamma^0) + \cos \theta \cos \psi \sin \theta^0 \cos \psi^0].\end{gathered} \tag{1.5.1}$$

Rappelons que θ^0, ψ^0 et γ^0 sont les valeurs des angles θ', ψ' et γ pour $\theta = \psi = 0$ (lorsque les plans des anneaux intérieurs des deux suspensions sont parallèles à la base du boîtier de la première suspension).

Les deux premières égalités (1.5.1) ne font pas intervenir θ^0 et donc ni l'angle ψ', ni l'angle γ ne dépendent de θ^0. Cette circonstance semble au premier abord inattendue mais elle s'explique aisément à partir des considérations purement géométriques.

Plaçons à bord du véhicule porteur de deux suspensions à la cardan encore une suspension que nous qualifierons d'auxiliaire à la différence des suspensions principales considérées. Supposons que la position angulaire des anneaux extérieur et intérieur de la suspension auxiliaire par rapport au véhicule ne diffère pas de celle des anneaux correspondants de la seconde suspension principale. Dans ce cas l'axe y_* de l'anneau extérieur de la suspension auxiliaire sera parallèle à l'axe y' de l'anneau extérieur de la seconde suspension principale. Il en sera de même des axes ξ_* et ξ', ainsi que des axes η_* et η' liés à leurs anneaux intérieurs. Il s'ensuit l'égalité des angles ψ_* et ψ' que font entre eux les plans de l'anneau extérieur et de l'anneau intérieur de ces suspensions. Par ailleurs, l'angle γ_* de désadaptation en azimut de la suspension auxiliaire par rapport à la première suspension principale sera égal à l'angle γ de désadaptation en azimut des suspensions principales. Quant au boîtier de la suspension auxiliaire, il peut être tourné d'un angle quelconque autour de l'axe y_* (c'est-à-dire autour de l'axe de son anneau extérieur parallèle à l'axe y' de l'anneau extérieur de la seconde suspension principale) par rapport au boîtier de la suspension principale. Ceci signifie que l'angle θ_* fait par le plan de l'anneau extérieur de la suspension auxiliaire avec le plan de la base de son boîtier peut différer d'une quantité quelconque de l'angle analogue θ' se rapportant à la seconde suspension principale. Ainsi, on a

$$\psi_* = \psi', \quad \gamma_* = \gamma, \tag{1.5.2}$$

mais dans le cas général

$$\theta_* \neq \theta'. \tag{1.5.3}$$

Donnons maintenant au véhicule porteur une position angulaire telle que le plan xy du système xyz associé au boîtier de la première suspension principale (ce plan est parallèle au plan de la base du véhicule) coïncide avec le plan $\xi\eta$ de l'anneau intérieur de cette suspension. D'après ce qui a été établi au paragraphe précédent, les angles θ' et ψ' se rapportant à la seconde suspension prendront dans ce cas les valeurs θ^0 et ψ^0, alors que l'angle de désadaptation en azimut deviendra égal à γ^0. Désignons par θ_*^0, ψ_*^0 et γ_*^0 les valeurs correspondantes des angles θ_*, ψ_* et γ_* se rapportant à la suspension auxiliaire. En partant des égalités (1.5.2) on peut écrire

$$\psi_*^0 = \psi^0, \quad \gamma_*^0 = \gamma^0. \tag{1.5.4}$$

Mais dans le cas général l'inégalité (1.5.3) donne

$$\theta_*^0 \neq \theta^0. \tag{1.5.5}$$

Ainsi, les positions angulaires des boîtiers de deux suspensions à la cardan : de la seconde suspension principale et de la suspension auxiliaire, sont différentes par suite de l'inégalité des angles θ_*^0 et θ^0. Néanmoins, ces suspensions présentent des angles égaux formés par les plans des anneaux extérieur et intérieur et la même désadaptation en azimut par rapport à la première suspension principale. Il s'ensuit que les angles ψ' et γ doivent être indépendants de θ^0, ce qui est en parfait accord avec les deux premières formules (1.5.1).

Envisageons de nouveau deux suspensions à la cardan dont les plans des anneaux intérieurs sont comme précédemment strictement parallèles l'un à l'autre. Sans changer la position du boîtier de la seconde suspension, faisons tourner, d'un angle arbitraire, le boîtier de la première autour de l'axe y de son anneau extérieur. Ceci étant, les anneaux extérieurs et intérieurs des deux suspensions ne changeront pas de position et donc l'angle ψ formé par les anneaux extérieur et intérieur de la première suspension ne sera pas modifié. Les angles θ' et ψ' matérialisés par la seconde suspension, et l'angle de désadaptation en azimut γ garderont certes, eux aussi, leurs valeurs. En revanche, l'angle θ qui détermine la position du boîtier de la première suspension par rapport à son anneau extérieur aura maintenant une valeur différente. Il semblerait de ce fait que, malgré les formules (1.5.1), les angles θ', ψ' et γ devraient également être indépendants de la variable θ, c'est-à-dire ne se déterminer que par trois paramètres ψ', ψ^0 et γ^0. Or, comme il sera montré plus loin, une telle conclusion n'est valable que pour le nombre de paramètres qui déterminent les angles ψ' et γ. Prise dans son ensemble, elle est erronée parce que les quantités θ^0, ψ^0 et γ^0 qui caractérisent la position angulaire relative des suspensions varieront en grandeur après la rotation du boîtier de la première suspension autour de l'axe y. En effet, par suite de cette rotation,

les deux anneaux intérieurs changeront de position par rapport au boîtier de la seconde suspension pour $\theta = \psi = 0$.

Proposons-nous maintenant d'établir le nombre de paramètres géométriques essentiels caractérisant la position angulaire relative des suspensions, dont dépend l'angle de désadaptation en azimut γ. De la première et de la deuxième formule (1.5.1) on tire comme corollaire

$$\sin\gamma = \frac{\cos\theta\cos\psi^0\sin\gamma^0 - \sin\theta\sin\psi^0}{\sqrt{1-(\sin\psi\cos\psi^0\cos\gamma^0+\cos\psi\cos\theta\sin\psi^0+\sin\theta\cos\psi\cos\psi^0\sin\gamma^0)^2}}. \tag{1.5.6}$$

Ainsi qu'il résulte, de façon formelle, de la structure de la formule (1.5.6), l'angle γ est fonction de quatre variables: θ, ψ, ψ^0 et γ^0. Pourtant, comme il sera montré plus loin, il suffit de trois paramètres pour déterminer entièrement γ, ces trois paramètres caractérisant la géométrie « interne » particulière du système de deux suspensions à la cardan ou, ce qui revient au même, la disposition relative de leurs anneaux extérieurs et intérieurs.

En effet, donnons-nous la position relative des axes des anneaux extérieurs des suspensions à la cardan sous forme de deux droites non coplanaires. Supposons également donnée l'orientation des anneaux extérieur et intérieur de la première suspension par rapport à cette image géométrique. Il n'est pas difficile de se convaincre que par là même, vu la condition de parallélisme des plans des anneaux intérieurs des deux suspensions, sera déterminée la position des anneaux extérieur et intérieur de la seconde suspension et donc la valeur de l'angle γ. Le nombre de paramètres déterminant la configuration des quatre anneaux que nous venons de décrire est égal à trois. En effet, pour de tels paramètres on peut prendre notamment: l'angle δ des axes non coplanaires des anneaux extérieurs, un angle ε qui caractérise la position de l'anneau extérieur de la première suspension par rapport aux plans parallèles contenant les axes non coplanaires mentionnés ci-dessus, et l'angle ψ formé par les plans des anneaux intérieur et extérieur de la même suspension. Quant aux paramètres qui déterminent la position angulaire des boîtiers des deux suspensions par rapport à l'image géométrique mentionnée plus haut, l'angle de désadaptation en azimut γ n'en dépend nullement. Pour paramètres géométriques indépendants qui déterminent l'angle γ, il est commode de prendre, au lieu des angles δ, ε et ψ trois quelconques des quatre angles δ, λ, μ et μ' introduits de la façon suivante (fig. 16 et 17). Le premier d'entre eux, c'est-à-dire δ, est l'angle des axes y et y' non coplanaires des anneaux extérieurs des suspensions considérées. Les angles μ et μ' représentent les pentes respectives des axes parallèles ζ et ζ' par rapport aux

axes y et y'. Enfin, λ est l'angle que l'axe ζ (ainsi que l'axe ζ') fait avec la perpendiculaire commune p aux axes non coplanaires y et y' ou, ce qui revient au même, avec la perpendiculaire aux plans parallèles yy'' et $y'y'''$ qui contiennent ces axes. Les angles δ, λ, μ et μ' caractérisent la géométrie « interne » du système de deux suspensions à la cardan, mentionnée plus haut. Les angles énumérés restent inchangés quels que soient les déplacements angulaires des boîtiers des suspensions, chaque boîtier tournant autour

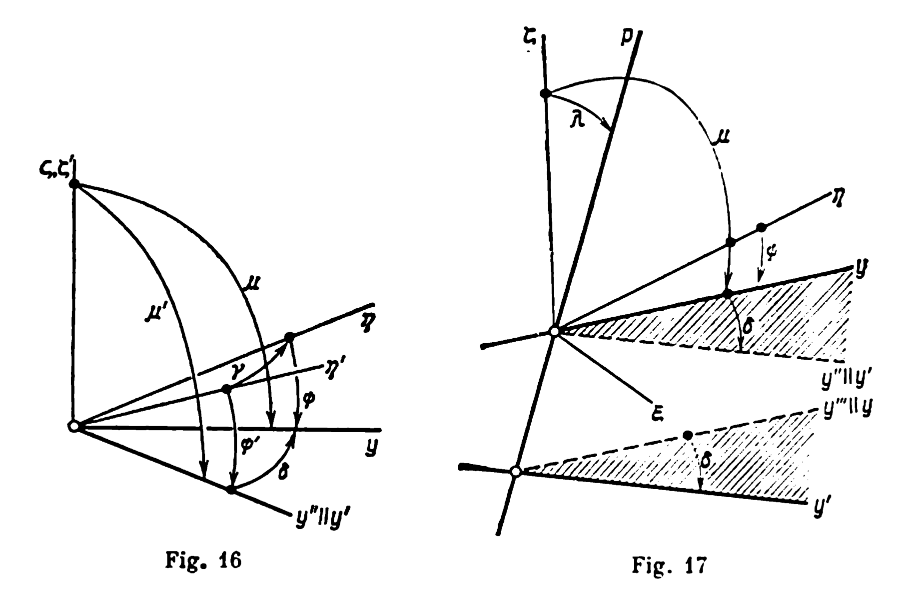


Fig. 16 Fig. 17

de l'axe de son anneau extérieur. Etant liés par une relation qui sera établie à la fin du présent paragraphe, ces angles ne peuvent pas être donnés arbitrairement. Remarquons également (v. fig. 17) que l'angle μ des axes ζ et y est lié à l'angle ψ des axes η et y par l'égalité

$$\mu = \frac{\pi}{2} + \psi. \tag{1.5.7}$$

En effet, les axes ζ, η et y (v. fig. 17) sont situés dans le même plan perpendiculaire à l'axe ξ (autour duquel l'anneau intérieur de la première suspension tourne par rapport à l'anneau extérieur). Pour des raisons tout à fait analogues, on a également

$$\mu' = \frac{\pi}{2} + \psi'. \tag{1.5.8}$$

Chacune des deux paires d'angles λ et μ ou λ et μ' détermine la position des plans parallèles $\xi\eta$ et $\xi'\eta'$ par rapport à l'image géomé-

trique constituée de deux axes non coplanaires y et y'. En effet, les droites non coplanaires y et y' déterminent de façon univoque la perpendiculaire p qui leur est commune. L'axe ζ parallèle à l'axe ζ' fait avec cette perpendiculaire l'angle λ et avec l'axe y, l'angle μ; la direction de l'axe ζ et donc du plan $\xi\eta$ est par là même entièrement déterminée. La direction de l'axe ζ (et donc de l'axe ζ') est déterminée exactement de la même manière par les angles λ et μ'.

Désignons par l', m' et n' les cosinus des angles que l'axe y' fait avec les axes du système de coordonnées xyz (lié au boîtier de la première suspension à la cardan), et par l, m et n les cosinus des angles que l'axe y fait avec les axes du même système. Suivant la table (1.4.6), on a

$$l' = \cos\psi^0 \sin\gamma^0, \quad m' = \cos\psi^0 \cos\gamma^0, \quad n' = -\sin\psi^0 \tag{1.5.9}$$

et, bien entendu,

$$l = 0, \quad m = 1, \quad n = 0. \tag{1.5.10}$$

Les cosinus des angles que la perpendiculaire p, commune aux droites y' et y, fait avec les axes du système xyz sont représentés, compte tenu des désignations adoptées plus haut, par les formules de la géométrie analytique:

$$\cos(\widehat{p, x}) = \frac{m'n - n'm}{\sin(\widehat{y', y})}, \quad \cos(\widehat{p, y}) = \frac{n'l - l'n}{\sin(\widehat{y', y})}, \quad \cos(\widehat{p, z}) = \frac{l'm - m'l}{\sin(\widehat{y', y})} \tag{1.5.11}$$

dans lesquelles

$$\sin(\widehat{y', y}) = \sqrt{(m'n - n'm)^2 + (n'l - l'n)^2 + (l'm - m'l)^2} \tag{1.5.12}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sin(\widehat{y', y}) = \sqrt{1 - (ll' + mm' + nn')^2}. \tag{1.5.13}$$

En utilisant dans les formules (1.5.11) les égalités (1.5.9), (1.5.10) et tenant compte de ce que l'angle des axes y et y' était désigné précédemment par δ, on obtient

$$\cos(\widehat{p, x}) = \frac{\sin\psi^0}{\sin\delta}, \quad \cos(\widehat{p, y}) = 0, \quad \cos(\widehat{p, z}) = \frac{\cos\psi^0 \sin\gamma^0}{\sin\delta}, \tag{1.5.14}$$

où, suivant la formule (1.5.12) et les mêmes égalités (1.5.9) et (1.5.10),

$$\sin\delta = \sqrt{\sin^2\psi^0 + \cos^2\psi^0 \sin^2\gamma^0}. \tag{1.5.15}$$

Remarquons que pour $\psi^0 = 0$ et $\gamma^0 > 0$ l'angle δ devient égal à l'angle γ^0. Dans ce cas, l'axe y' se trouve dans le plan xy et la perpendiculaire p est dirigée suivant l'axe z.

Cherchons maintenant le cosinus de l'angle λ que la droite p fait avec l'axe ζ. On a

$$\cos\lambda = \cos(\widehat{p, \zeta}) = \cos(\widehat{p, x})\cos(\widehat{\zeta, x}) + \cos(\widehat{p, y})\cos(\widehat{\zeta, y}) + \cos(\widehat{p, z})\cos(\widehat{\zeta, z}). \quad (1.5.16)$$

Compte tenu des données de la table (1.4.2) et de la formule (1.5.14), nous obtenons

$$\cos\lambda = \frac{\cos\theta\cos\psi\cos\psi^0\sin\gamma^0 - \sin\theta\cos\psi\sin\varphi^0}{\sin\delta}. \quad (1.5.17)$$

Or, la deuxième formule (1.5.1) donne

$$\sin\theta\sin\psi^0 - \cos\theta\cos\psi^0\sin\gamma^0 = -\sin\gamma\cos\psi'. \quad (1.5.18)$$

Par conséquent,

$$\cos\lambda = \frac{\sin\gamma\cos\psi\cos\psi'}{\sin\delta}. \quad (1.5.19)$$

On en tire, en faisant usage des égalités (1.5.7), (1.5.8), la représentation cherchée de l'angle de désadaptation en azimut γ par l'intermédiaire des paramètres δ, λ, μ et μ':

$$\sin\gamma = \frac{\sin\delta\cos\lambda}{\sin\mu\sin\mu'}. \quad (1.5.20)$$

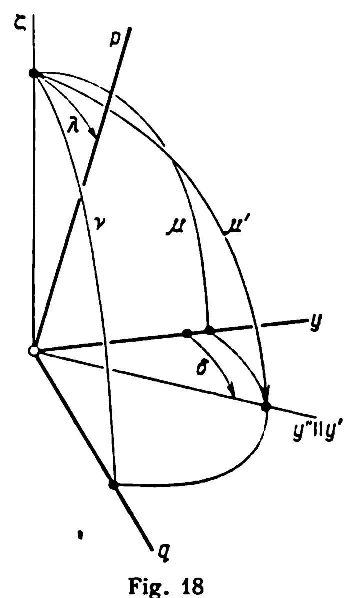


Fig. 18

Signalons que la formule (1.5.20) peut également s'obtenir par les méthodes de la trigonométrie sphérique.

Comme cela a été dit plus haut, les valeurs des angles δ, λ, μ et μ' sont liées par une relation. Celle-ci peut être obtenue de la façon suivante. Construisons une droite q perpendiculaire à la fois à l'axe y (fig. 18) et à la droite p. La droite p étant, à son tour, perpendiculaire à l'axe y, les trois droites p, q et y, deux à deux perpendiculaires, peuvent être considérées comme les axes d'un système de coordonnées auxiliaire. Menons par l'origine de ce système la droite y'' parallèle à l'axe y'. Cette droite est également perpendiculaire à la droite p et se situe donc dans le plan qy en formant, suivant

le théorème de l'angle des droites non coplanaires, l'angle δ avec l'axe y. Les cosinus des angles que l'axe y' fait avec les axes du système pqy s'expriment donc par

$$\cos(\widehat{y', p}) = 0, \quad \cos(\widehat{y', q}) = \sin\delta, \quad \cos(\widehat{y', y}) = \cos\delta. \qquad (1.5.21)$$

Par la suite, nous aurons besoin des expressions donnant les cosinus des angles que l'axe ζ (et l'axe ζ' qui lui est parallèle) fait avec les axes du même système pqy. Représentons-les sous la forme

$$\cos(\widehat{\zeta, p}) = \cos\lambda, \quad \cos(\widehat{\zeta, q}) = \cos\nu, \quad \cos(\widehat{\zeta, y}) = \cos\mu, \qquad (1.5.22)$$

où λ et μ sont les angles, introduits précédemment, que l'axe ζ fait respectivement avec la droite p et l'axe y; ν est un angle, pour le moment, inconnu que l'axe ζ fait avec la droite q.

Les formules (1.5.21) et (1.5.22) permettent d'obtenir, pour le cosinus de l'angle que font entre eux les axes y' et ζ, l'expression suivante:

$$\cos(\widehat{y', \zeta}) = \cos(\widehat{y', p})\cos(\widehat{\zeta, p}) + \cos(\widehat{y', q})\cos(\widehat{\zeta, q}) +$$
$$+ \cos(\widehat{y', y})\cos(\widehat{\zeta, y}) = \sin\delta\cos\nu + \cos\delta\cos\mu. \qquad (1.5.23)$$

Or, l'angle des axes y' et ζ a été précédemment désigné par μ'. Compte tenu de cette circonstance, on tire de la formule (1.5.23)

$$\cos\nu = \frac{\cos\mu' - \cos\delta\cos\mu}{\sin\delta}. \qquad (1.5.24)$$

D'autre part, les droites p, q et l'axe y étant perpendiculaires deux à deux, les cosinus des angles λ, ν et μ que l'axe ζ fait avec eux doivent satisfaire à la relation bien connue en géométrie analytique:

$$\cos^2\lambda + \cos^2\nu + \cos^2\mu = 1. \qquad (1.5.25)$$

En tenant compte de la formule (1.5.24) donnant $\cos\nu$, on obtient, après quelques transformations simples, la relation cherchée entre les angles δ, λ, μ et μ', soit

$$\sin^2\delta\sin^2\lambda = \cos^2\mu + \cos^2\mu' - 2\cos\mu\cos\mu'\cos\delta. \qquad (1.5.26)$$

La formule (1.5.20) peut se mettre maintenant sous la forme

$$\sin\gamma = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\delta - \cos^2\mu - \cos^2\mu' + 2\cos\mu\cos\mu'\cos\delta}}{\sin\mu\sin\mu'}. \qquad (1.5.27)$$

Ainsi, comme il a été indiqué précédemment, l'angle γ est fonction de trois paramètres géométriques indépendants δ, μ et μ'.

§ 6. Erreurs de quasi-cardan dues au compas gyroscopique

Lors de la détermination de l'erreur dans l'indication du cap du navire par un compas gyroscopique on a à résoudre des problèmes de nature pareille à celle des problèmes examinés au cours des paragraphes précédents. Le cap est généralement enregistré à l'aide d'un dispositif d'asservissement spécial. A la suite du mouvement de roulis ou de tangage, ainsi que lors de la manœuvre du navire, les capteurs de ce dispositif peuvent présenter des écarts par rapport aux diamètres Nord-Sud et Ouest-Est de l'élément sensible du compas gyroscopique. Quant aux diamètres mentionnés, ils sont maintenus avec une grande précision dans le plan horizontal par des gyroscopes prévus à l'intérieur de l'élément sensible. Un désalignement des capteurs conduit à des erreurs dans les indications du compas gyroscopique. Dans la suite de cet ouvrage, ces erreurs seront appelées *erreurs de quasi-cardan*, parce que d'après leur nature géométrique elles s'apparentent aux erreurs qui se produisent lors du fonctionnement en commun des suspensions à la cardan.

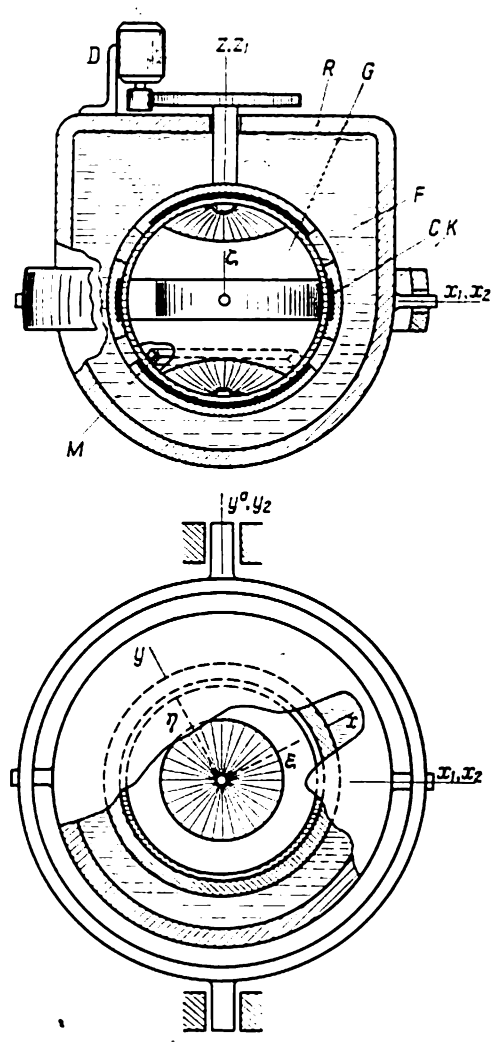


Fig. 19

Dans la plupart des compas gyroscopiques modernes, l'élément sensible est constitué par une *sphère G* dite *gyroscopique* (fig. 19) qui représente une enveloppe métallique sphérique comportant un revêtement en ébonite alterné avec un revêtement conducteur en

graphite-ébonite. La sphère gyroscopique ou, en abrégé, *gyrosphère* est immergée dans un liquide conducteur de l'électricité et renferme un dispositif gyroscopique complexe (v. tome II, chap. II, § 6). Elle est entourée d'une autre *sphère C* dite *d'asservissement*. Le diamètre intérieur de la sphère d'asservissement C n'est que légèrement supérieur au diamètre extérieur de la gyrosphère G. Une partie considérable de la surface intérieure de la sphère C est également recouverte d'ébonite et présente des orifices pour le passage du liquide conducteur. Le reste de la surface est constitué par des électrodes conductrices disposées en regard des électrodes de l'élément sensible G. Chacune des sphères porte trois électrodes. Deux d'entre elles ont la forme de calottes sphériques, tandis que la troisième représente (suivant la construction du compas gyroscopique) soit la moitié d'une zone sphérique (fig. 20), soit deux quarts de celle-ci (fig. 21) disposés symétriquement. Ces électrodes servent à transmettre le courant triphasé à travers le liquide conducteur vers l'intérieur de la gyrosphère, pour faire tourner les rotors des gyroscopes et alimenter le solénoïde M. Ce dernier est destiné à produire des forces électromagnétiques qui tendent à faire coïncider le centre géométrique de la gyrosphère G avec le centre de la surface intérieure de la sphère d'asservissement C. En plus des électrodes mentionnées ci-dessus, le montage comporte encore les électrodes des capteurs pour la commande du moteur d'entraînement de la sphère d'asservissement (v. plus loin) et les électrodes permettant une commande supplémentaire de l'élément sensible du compas gyroscopique (par exemple, la mise hors circuit du système d'amortissement, v. tome II, chap. II, § 6).

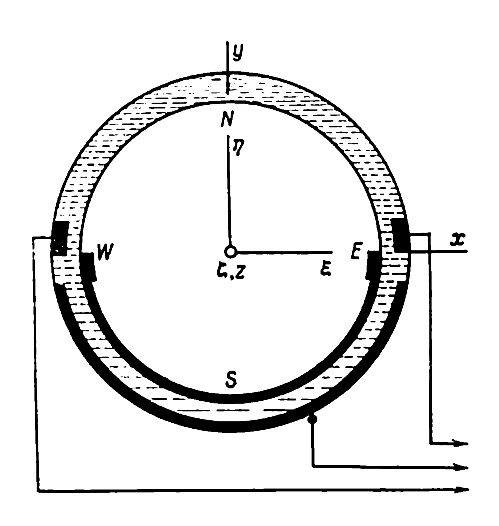


Fig. 20

Le réservoir R rempli de liquide conducteur, dans lequel est plongée la sphère d'asservissement renfermant la sphère gyroscopique, est suspendu à bord du navire au moyen d'un anneau de cardan K. L'axe y_2 de cet anneau (v. fig. 19) que nous appellerons anneau de cardan extérieur est dirigé suivant l'axe longitudinal y^0 du navire. Le réservoir qui joue le rôle de l'anneau de cardan intérieur est suspendu dans l'anneau extérieur sur l'axe x_1 (x_2) perpendiculaire

à l'axe y_2 de l'anneau extérieur. La sphère d'asservissement, elle, peut tourner par rapport au réservoir autour de l'axe z perpendiculaire à l'axe x_1 (x_2). Celles des électrodes qui ont la forme de calottes sphériques sont placées en haut et en bas de la sphère d'asservissement ; l'axe z est leur axe de symétrie. La rotation de la sphère d'asservissement C par rapport au réservoir R est assurée par le moteur D dont le sens de rotation dépend de la position relative de la sphère d'asservissement et de la sphère gyroscopique.

Si le navire est au point fixe (à l'ancre, à quai, etc.), la sphère gyroscopique prend, au bout de quelques heures après la mise en

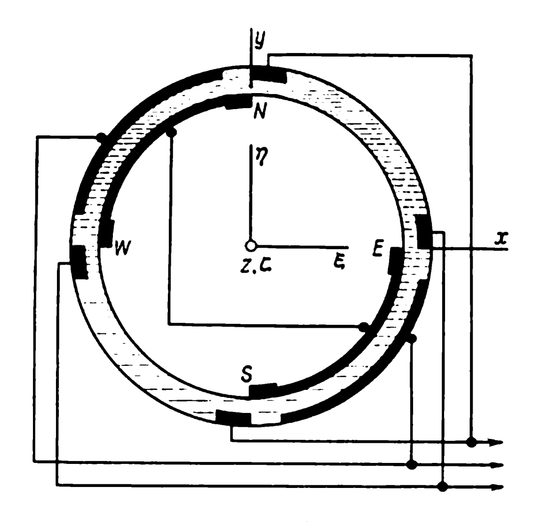


Fig. 21

marche du gyrocompas, une orientation bien déterminée par rapport aux points cardinaux. Le rayon qui est dirigé dans ce cas vers le Nord est appelé rayon Nord de la sphère, le rayon dirigé vers l'Est est appelé rayon Est, etc. D'une manière analogue, on introduit les notions de diamètre Nord-Sud et de diamètre Ouest-Est de la gyrosphère.

Associons à la gyrosphère un système de coordonnées $\xi\eta\zeta$, en dirigeant les axes ξ, η et ζ respectivement suivant ses rayons Est, Nord et vertical. Nous admettrons que l'axe ζ de ce système conserve sa direction verticale, quelles que soient les manœuvres du navire, et qu'en conséquence le plan $\xi\eta$ est constamment horizontal. L'axe η ne s'oriente exactement vers le Nord que lorsque le navire est immobile. Si le navire est en mouvement, la direction de l'axe η fait avec le plan méridien un angle, appelé *déviation* du compas, qui est, dans le cas général, différent de zéro.

Les éléments sensibles des compas gyroscopiques actuels ne présentent qu'une *déviation* dite *de cap* ou *de vitesse*. Dans ces éléments, l'écart du rayon Nord, c'est-à-dire de l'axe η, par rapport au plan méridien en dépend que de la valeur et de la direction de la vitesse du navire par rapport à la Terre, ainsi que de la latitude du point où se trouve le navire (v. tome II, chap. II, § 6).

On appelle généralement *cap vrai au gyrocompas* $\varkappa_0$ du navire (fig. 22) l'angle que le rayon Nord, c'est à-dire l'axe η, fait avec la projection g de l'axe longitudinal y^0 du navire sur le plan diamétral $\xi\eta$ (horizontal par hypothèse) de la gyrosphère.

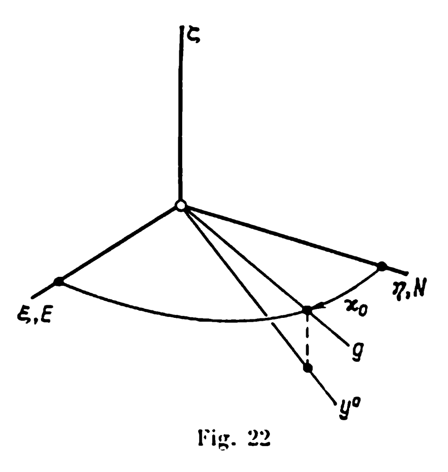


Fig. 22

La sphère d'asservissement doit, comme l'indique son nom, suivre les mouvements de la gyrosphère par rapport au navire lorsque celui-ci change de cap. A cet effet, il faut disposer d'une information continue sur la position relative de ces sphères. Considérons deux variantes possibles permettant d'obtenir cette information. Dans la première variante, la couche conductrice de la gyrosphère, se trouvant au voisinage de son équateur horizontal, est réalisée sous forme de la moitié de la zone sphérique. Celle-ci est située sur le côté Sud, symétriquement par rapport au plan $\xi\eta$ (v. fig. 20). Aux extrémités de cette demi-zone sont placées deux électrodes à conductance élevée. La sphère d'asservissement, elle, porte, en plus de l'électrode principale placée en regard de la demi-zone de la gyrosphère, encore deux petites électrodes supplémentaires (v. fig. 20). Disposées sur les côtés opposés de la sphère d'asservissement C, ces dernières sont contiguës à la section de la sphère C par le plan xz d'un système de coordonnées xyz. Ce système est lié à la sphère d'asservissement de la façon suivante : son origine coïncide avec le centre géométrique de la sphère C ; l'axe z, introduit précédemment, est l'axe de rotation de C, alors que l'axe y est situé dans le plan de symétrie des électrodes mentionnées.

Les résistances du liquide entre les électrodes situées sur la sphère d'asservissement et les électrodes à conductance élevée prévues dans la demi-zone de la gyrosphère constituent des branches d'un pont électrique qui détermine finalement la vitesse et le sens de rotation du moteur destiné à faire tourner la sphère d'asservissement dans le réservoir. Le moteur amène, de façon continue, la sphère d'asservissement dans une position telle que ces résistances s'éga-

lisent. Si les centres géométriques de la gyrosphère et de la sphère d'asservissement sont confondus et l'axe z de cette dernière est vertical, ceci signifie qu'il y a coïncidence entre les axes x et ξ, ainsi qu'entre les axes y et η des systèmes xyz et $\xi\eta\zeta$ liés respectivement à la sphère d'asservissement et à la sphère gyroscopique.

Supposons maintenant que par suite du mouvement de roulis ou de tangage, d'une manœuvre du navire ou pour une autre cause quelconque, l'axe z lié à la sphère d'asservissement (ainsi qu'au réservoir) se soit écarté de la position verticale. Les résistances de

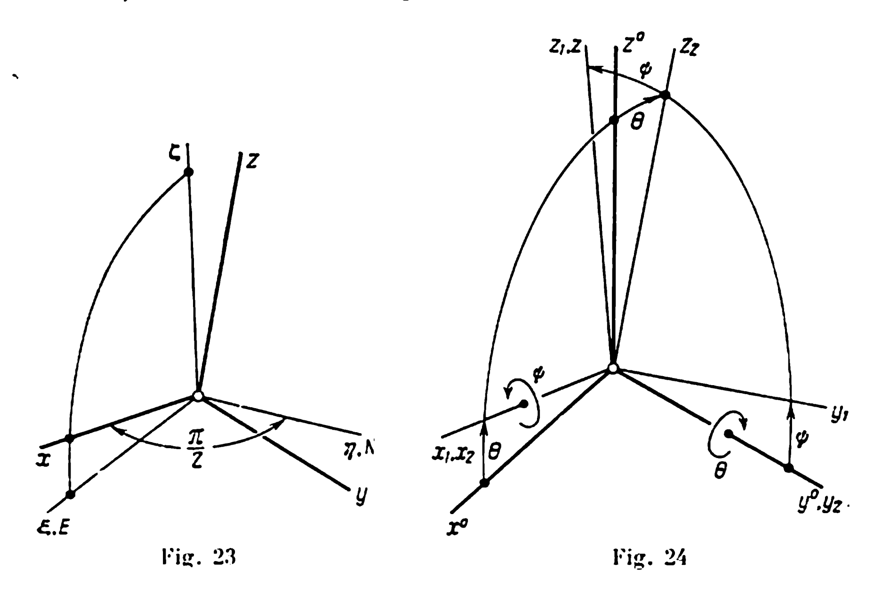


Fig. 23 Fig. 24

passage entre les électrodes supplémentaires de la sphère d'asservissement et la demi-zone conductrice de la gyrosphère seront égales si les extrémités de ces électrodes, contiguës au Nord à la section de la sphère d'asservissement par le plan xz, viennent en contact avec le plan $\xi\zeta$ du système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ lié à la gyrosphère (v. fig. 20). C'est à ce plan que sont contiguës au Sud les électrodes à conductance élevée situées dans la demi-zone de la gyrosphère. Dans cette hypothèse, le moteur fera tourner la sphère d'asservissement de telle sorte que l'axe x revienne sans cesse dans le plan vertical $\xi\zeta$ et par là même soit perpendiculaire à l'axe η (fig. 23). Ainsi, pendant toute la durée de fonctionnement du moteur, est réalisée la condition

$$\cos(\widehat{x, \eta}) = 0. \quad (1.6.1)$$

Introduisons maintenant un système de coordonnées $x^0y^0z^0$ lié à la structure du navire, en plaçant son origine au centre de la suspen-

sion à la cardan de la sphère d'asservissement (fig. 24). L'axe y^0 de ce système coïncide avec l'axe y_2 et est donc parallèle à l'axe longitudinal du navire (v. fig. 19). L'axe z^0 est perpendiculaire au plan de son pont et est dirigé vers le haut, alors que l'axe x^0 est dirigé vers le tribord. Par ailleurs, associons à l'anneau de cardan extérieur un système de coordonnées $x_2y_2z_2$ dont l'axe y_2 a déjà été mentionné et dont le plan x_2y_2 est son plan mitan. Pareillement à ce que nous avons fait au cours des paragraphes précédents du présent chapitre, introduisons l'angle θ de rotation de l'anneau extérieur par rapport au navire, en considérant cet angle comme positif si le système $x_2y_2z_2$ est tourné par rapport à $x^0y^0z^0$ dans le sens des aiguilles d'une montre, lorsqu'on regarde cette rotation du côté de l'avant du navire, c'est-à-dire du côté de la partie positive de l'axe y^0 (ou, ce qui revient au même, de l'axe y_2). Pour $\theta = 0$ les axes correspondants des systèmes $x_2y_2z_2$ et $x^0y^0z^0$ sont confondus. Enfin, attachons au réservoir un système de coordonnées $x_1y_1z_1$ dont l'axe x_1 est confondu avec l'axe x_2 lié à l'anneau de cardan extérieur, et l'axe z_1 coïncide avec l'axe z de rotation de la sphère d'asservissement par rapport au réservoir. De même, en utilisant les notations adoptées dans les paragraphes précédents, désignons par ψ l'angle des axes y_2 et y_1. Cet angle sera considéré comme positif si le système $x_1y_1z_1$ tourne par rapport à $x_2y_2z_2$ en sens inverse des aiguilles d'une montre lorsqu'on regarde cette rotation du côté du tribord, c'est-à-dire du côté de la partie positive des axes x_1 et x_2 confondus.

Il n'est pas difficile de construire la table des cosinus des angles formés par les axes du système $x^0y^0z^0$ lié au navire et les axes du système $x_1y_1z_1$ lié au réservoir du compas gyroscopique. A cet effet, il suffit de reprendre les calculs effectués au premier paragraphe. Il en résulte la table suivante:

	x^0	y^0	z^0	
x_1	$\cos\theta$	0	$\sin\theta$	
y_1	$-\sin\theta\sin\psi$	$\cos\psi$	$\cos\theta\sin\psi$	(1.6.2)
z_1	$-\sin\theta\cos\psi$	$-\sin\psi$	$\cos\theta\cos\psi$.	

Par analogie à ce qui a été fait dans le même paragraphe, introduisons l'angle $\varkappa$ (fig. 25) des axes y et y_1 (ou, ce qui revient au même, des axes x et x_1). L'angle $\varkappa$ est appelé *cap au gyrocompas* du navire. Il est lu directement sur la rose des caps du gyrocompas et est reproduit à l'aide de liaison synchrone sur tous les compas répétiteurs. L'angle $\varkappa$ est considéré comme positif si le système de coordonnées $x_1y_1z_1$ (lié au réservoir) est tourné dans le sens des aiguilles d'une montre par rapport au système xyz (lié à la sphère d'asservissement), lorsque cette rotation est observée d'en haut. L'axe y_1 est la projection de l'axe y^0 (parallèle à l'axe longitudinal du navire) sur le plan x_1y_1 ou, ce qui revient au même, sur le plan xy. La table des

cosinus des angles que forment entre eux les axes des systèmes xyz et $x_1y_1z_1$ est de la forme

$$\begin{array}{cccc} & x_1 & y_1 & z_1 \\ x & \cos\varkappa & \sin\varkappa & 0 \\ y & -\sin\varkappa & \cos\varkappa & 0 \\ z & 0 & 0 & 1. \end{array} \tag{1.6.3}$$

En se servant des deux dernières tables, on peut construire la table, bien importante pour la suite, des cosinus des angles que les

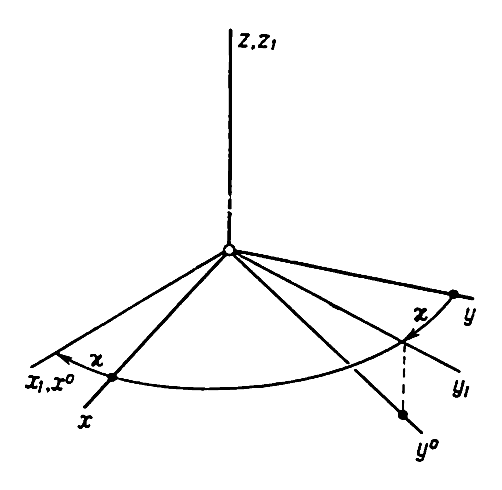


Fig. 25

axes du système xyz lié à la sphère d'asservissement font avec ceux du système $x^0y^0z^0$ lié au navire, soit

$$\begin{array}{cccc} & x^0 & y^0 & z^0 \\ x & -\sin\theta\sin\psi\sin\varkappa+ & \cos\psi\sin\varkappa & \cos\theta\sin\psi\sin\varkappa+ \\ & +\cos\theta\cos\varkappa & & +\sin\theta\cos\varkappa \\ y & -\sin\theta\sin\psi\cos\varkappa- & \cos\psi\cos\varkappa & \cos\theta\sin\psi\cos\varkappa- \\ & -\cos\theta\sin\varkappa & & -\sin\theta\sin\varkappa \\ z & -\sin\theta\cos\psi & -\sin\psi & \cos\theta\cos\psi. \end{array} \tag{1.6.4}$$

Comme il a été indiqué précédemment, le cap vrai au gyrocompas du navire est l'angle $\varkappa_0$ que l'axe η du système $\xi\eta\zeta$ lié à la gyrosphère fait avec la projection de l'axe y^0 (parallèle à l'axe longitudinal du navire) sur le plan $\xi\eta$ (v. fig. 22). Supposons que l'axe z de rotation de la sphère d'asservissement est vertical. Il en sera de même de l'axe

z_1 du système $x_1y_1z_1$ lié au réservoir, car z_1 coïncide avec z. Il s'ensuit que les axes z et z_1 seront confondus avec l'axe ζ du système $\xi\eta\zeta$ (lié à la gyrosphère) et les angles $\varkappa$ et $\varkappa_0$ deviendront égaux l'un à l'autre. En effet, dans ce cas, les axes x et y viennent coïncider respectivement avec les axes ξ et η. Par conséquent, seront également confondues les projections respectives y_1 et g de l'axe y^0 (parallèle à l'axe longitudinal du navire) sur le plan xy et sur le plan horizontal $\xi\eta$ confondu avec ce dernier. Il en résulte que l'angle $\varkappa$ que font entre eux les axes y_1 et y devient égal à l'angle formé par l'axe η avec la projection g de l'axe y^0 sur le plan $\xi\eta$, c'est-à-dire que le cap au gyrocompas $\varkappa$ du navire se transforme en cap vrai au gyrocompas $\varkappa_0$.

Introduisons maintenant, en plus de l'angle $\varkappa_0$, encore les angles θ_0 et ψ_0 qui déterminent, tous les trois, la position du système $x^0y^0z^0$ lié au navire par rapport au système $\xi\eta\zeta$ lié à la gyrosphère. A cet effet, faisons tourner par la pensée le réservoir du gyrocompas et la sphère d'asservissement par rapport au navire de telle sorte que les axes du système xyz lié à la sphère d'asservissement soient confondus avec les axes correspondants du système $\xi\eta\zeta$. Dans ce cas, l'angle θ prendra une valeur θ_0, et l'angle ψ une valeur ψ_0. Nous appellerons l'angle θ_0 la *bande au gyrocompas* et l'angle ψ_0 l'*assiette au gyrocompas* du navire. Dans le cas général, l'axe z ne se confond pas avec l'axe ζ et donc, en règle générale, les plans xy et $\xi\eta$ ne sont pas parallèles. Par conséquent, les angles θ et θ_0 ainsi que les angles ψ et ψ_0 ne sont égaux que dans des cas exceptionnels. Il est évident que pour construire la table des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes $\xi\eta\zeta$ et $x^0y^0z^0$, il suffit de remplacer dans la table (1.6.4) les lettres x, y, z par ξ, η, ζ et les angles θ, ψ, $\varkappa$ par θ_0, ψ_0, $\varkappa_0$. Il en résultera la table suivante:

	x^0	y^0	z^0
ξ	$-\sin\theta_0\sin\psi_0\sin\varkappa_0+$ $+\cos\theta_0\cos\varkappa_0$	$\cos\psi_0\sin\varkappa_0$	$\cos\theta_0\sin\psi_0\sin\varkappa_0+$ $+\sin\theta_0\cos\varkappa_0$
η	$-\sin\theta_0\sin\psi_0\cos\varkappa_0-$ $-\cos\theta_0\sin\varkappa_0$	$\cos\psi_0\cos\varkappa_0$	$\cos\theta_0\sin\psi_0\cos\varkappa_0-$ $-\sin\theta_0\sin\varkappa_0$
ζ	$-\sin\theta_0\cos\psi_0$	$-\sin\psi_0$	$\cos\theta_0\cos\psi_0$.

(1.6.5)

Mettons maintenant la condition (1.6.1) sous la forme

$$\cos(\widehat{x, \eta}) = \cos(\widehat{x, x^0})\cos(\widehat{x^0, \eta}) + \cos(\widehat{x, y^0})\cos(\widehat{y^0, \eta}) + \cos(\widehat{x, z^0})\cos(\widehat{z^0, \eta}) = 0. \quad (1.6.6)$$

En y introduisant, suivant les tables (1.6.4) et (1.6.5), les valeurs des cosinus des angles que forment entre eux les axes correspondants, nous obtenons, après quelques transformations simples, la relation

$$\cos(\widehat{x, \eta}) = \cos(\theta - \theta_0)(\sin\psi \sin\varkappa \sin\psi_0 \cos\varkappa_0 - \cos\varkappa \sin\varkappa_0) + \\ + \sin(\theta - \theta_0)(\sin\psi \sin\varkappa \sin\varkappa_0 + \cos\varkappa \sin\psi_0 \cos\varkappa_0) + \\ + \cos\psi \sin\varkappa \cos\psi_0 \cos\varkappa_0 = 0. \quad (1.6.7)$$

En se servant de cette relation on peut déterminer le cap vrai au gyrocompas $\varkappa_0$ en fonction des valeurs données des angles $\theta, \psi, \varkappa$ qui caractérisent la position de la sphère d'asservissement du gyrocompas par rapport au navire, et des valeurs données des angles θ_0 et ψ_0 qui caractérisent la position relative du navire et du diamètre vertical de la sphère gyroscopique.

Les angles θ et θ_0 interviennent dans la relation (1.6.7) sous forme de leur différence, ce qui comporte une explication géométrique simple. En effet, imaginons qu'en plus de la suspension à la cardan réelle de la sphère d'asservissement il existe encore une suspension avec le même axe y_2 de son anneau extérieur, c'est-à-dire parallèle à l'axe longitudinal du navire. Supposons que le plan de l'anneau intérieur de cette suspension imaginaire se confond avec le plan $\xi\eta$, c'est-à-dire avec le plan de symétrie horizontal de la gyrosphère. La suspension imaginaire que nous considérons se confond complètement avec la suspension à la cardan de la sphère d'asservissement si l'on amène en coïncidence, comme cela a déjà été fait précédemment, les axes x, y et z liés à cette sphère avec les axes correspondants ξ, η et ζ liés à la sphère gyroscopique. L'angle que l'anneau extérieur de la suspension imaginaire fait avec le pont du navire est, dans ce cas, égal à la bande au gyrocompas θ_0, et l'angle formé entre les plans des anneaux extérieur et intérieur est l'assiette au gyrocompas ψ_0. Enfin, l'angle formé par l'axe de l'anneau intérieur de la suspension imaginaire avec le diamètre Ouest-Est de la sphère gyroscopique ou, ce qui revient au même, l'angle que la projection de l'axe y_2 de l'anneau extérieur de la suspension imaginaire sur le plan de son anneau intérieur fait avec le diamètre Nord-Sud, est le cap vrai au gyrocompas $\varkappa_0$.

Supposons maintenant que le navire ait effectué un certain mouvement angulaire, en conservant cependant inchangée l'orientation de son axe longitudinal et donc celle de l'axe y_2 des anneaux extérieurs des deux suspensions: de la suspension réelle de la sphère d'asservissement et de la suspension imaginaire de la gyrosphère. Dans le cas d'une telle rotation du navire autour de son axe longitudinal, la position relative de la sphère d'asservissement et de la gyrosphère, donc celle des systèmes de coordonnées xyz et $\xi\eta\zeta$ qui leur sont liés, doit rester inchangée. C'est pourquoi la valeur de $\cos(\widehat{x, \eta})$

restera invariable. Les angles ψ, $\varkappa$, ψ_0 et $\varkappa_0$ ne seront pas changés non plus, parce que l'orientation de l'axe y_2 de l'anneau extérieur des deux suspensions reste la même. Quant aux angles θ et θ^0, ils varieront d'une même quantité. Par conséquent. dans la relation (1.6.7) qui relie θ, ψ, $\varkappa$, θ_0, ψ_0 et $\varkappa_0$, les angles θ et θ_0 ne peuvent intervenir que par leur différence $\theta - \theta_0$ qui représente l'angle des anneaux extérieurs des suspensions réelle et imaginaire. Ceci est d'ailleurs confirmé par la structure de la relation (1.6.7). Des considérations géométriques analogues il résulte visiblement que lorsque les angles θ et θ_0 sont égaux, c'est-à-dire lorsque les anneaux extérieurs des deux suspensions sont confondus, la relation (1.6.7) entre les angles restants ψ, $\varkappa$, ψ_0 et $\varkappa_0$ ne doit faire intervenir les angles ψ et ψ_0 que sous la forme de leur différence $\psi - \psi_0$. En effet, si l'on pose $\theta = \theta_0$ dans la relation (1.6.7), on obtient l'égalité

$$\cos(\psi - \psi_0) \sin \varkappa \cos \varkappa_0 - \cos \varkappa \sin \varkappa_0 = 0 \qquad (1.6.8)$$

qui ne comprend que la différence des angles ψ et ψ_0. Enfin, si de plus $\psi = \psi_0$, ce qui signifie que les anneaux intérieurs coïncident, eux aussi, alors $\varkappa = \varkappa_0$ en vertu de l'égalité (1.6.8). Il en résulte que les suspensions se confondent complètement et que les axes x, y et z liés à la sphère d'asservissement coïncident avec les axes correspondants du système $\xi\eta\zeta$ lié à la sphère gyroscopique.

Les angles θ, ψ, θ_0 et ψ_0 sont généralement assez petits, de l'ordre de grandeur de la bande et de l'assiette du navire. C'est pourquoi, en développant les fonctions trigonométriques des arguments $\theta - \theta_0$, ψ et ψ_0 en série entière, nous ne garderons dans l'égalité (1.6.7) que des termes de premier et de deuxième ordre par rapport à ces angles. Il en résulte la formule

$$\sin(\varkappa - \varkappa_0) = \frac{1}{2}(\psi - \psi_0)^2 \sin \varkappa \cos \varkappa_0 - \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^2 \cos \varkappa \sin \varkappa_0 -$$
$$- (\theta - \theta_0)(\psi \sin \varkappa \sin \varkappa_0 + \psi_0 \cos \varkappa \cos \varkappa_0) \qquad (1.6.9)$$

qui montre que la différence $\varkappa - \varkappa_0$ est de deuxième ordre par rapport aux variables ψ, ψ_0, θ et θ_0. La formule (1.6.9) peut donc être remplacée par la formule qui est plus commode pour les applications:

$$\varkappa - \varkappa_0 = \Delta\varkappa = \frac{1}{2}[(\psi - \psi_0)^2 - (\theta - \theta_0)^2] \cos \varkappa \sin \varkappa -$$
$$- (\theta - \theta_0)(\psi \sin^2 \varkappa + \psi_0 \cos^2 \varkappa). \qquad (1.6.10)$$

Cette dernière formule permet d'évaluer, de la façon la plus simple, la différence $\Delta\varkappa$ entre le cap au gyrocompas $\varkappa$ et la valeur vraie du cap $\varkappa_0$. C'est cette différence que nous appellerons *erreur de quasi-cardan* du compas gyroscopique.

Dans la variante de construction du compas gyroscopique que nous venons de considérer, la rotation de la sphère d'asservissement

était déterminée par la position des électrodes à conductance élevée placées aux extrémités du diamètre Est-Ouest de la gyrosphère, par rapport aux électrodes opposées prévues sur la sphère d'asservissement. Aussi, pour que le fonctionnement du gyrocompas soit correct est-il nécessaire que la coïncidence des centres de la sphère d'asservissement et de la sphère gyroscopique soit assurée avec une précision suffisante. Dans le cas contraire, la résistance entre les électrodes sus-mentionnées pourra varier par suite du déplacement relatif des sphères. Il en résultera une désadaptation d'orientation d'une sphère par rapport à l'autre et comme conséquence une augmentation ultérieure de la différence $\varkappa - \varkappa_0$.

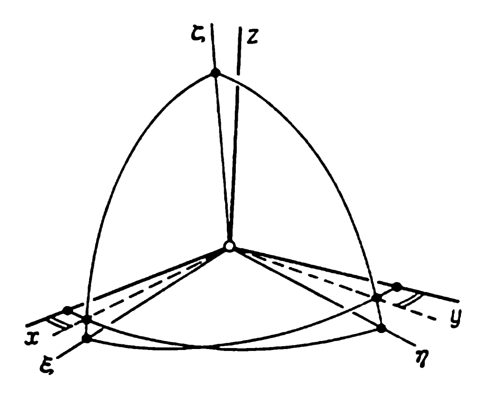


Fig. 26

Le compas gyroscopique peut également être réalisé suivant une forme constructive un peu plus compliquée qui permet d'éliminer dans une certaine mesure l'inconvénient indiqué. Dans cette construction, la couche conductrice de la zone équatoriale de la sphère occupe deux quarts opposés de cette zone. Sur ces électrodes, sont placées quatre autres électrodes de conductance élevée, adjacentes, de différents côtés, aux extrémités des diamètres Nord-Sud et Est-Ouest de la gyrosphère (v. fig. 21). La sphère d'asservissement porte, elle aussi, quatre électrodes correspondantes, disposées en regard des électrodes de la gyrosphère. De même que dans le circuit électrique de la première variante, ces électrodes constituent, avec le liquide conducteur, un pont électrique. Le moteur fait tourner la sphère d'asservissement jusqu'à l'instant où ce pont se met dans l'état d'équilibre.

A cet état, il correspond une position des axes x et y, liés à la sphère d'asservissement, par rapport au système de coordonnées $\xi\eta\zeta$, lié à la gyrosphère, pour laquelle l'angle que l'axe x fait avec le plan $\xi\zeta$ devient égal à l'angle que l'axe y fait avec le plan $\eta\zeta$ (fig. 26).

Le premier de ces angles est le complément de l'angle des axes x et η et le second est le complément de l'angle des axes y et ξ. Par conséquent, le moteur amène finalement la sphère d'asservissement dans une position pour laquelle est réalisée l'égalité

$$\cos(\widehat{x, \eta}) = \cos(\widehat{y, \xi}). \qquad (1.6.11)$$

Le cosinus de l'angle des axes x et η, figurant au premier membre de la dernière égalité, a déjà été déterminé à l'aide des tables (1.6.4) et (1.6.5). En faisant usage des mêmes tables et en effectuant des calculs analogues, on obtient pour le second membre de cette égalité l'expression suivante :

$$\cos(\widehat{y, \xi}) = \cos(\widehat{y, x^0}) \cos(\widehat{x^0, \xi}) + \cos(\widehat{y, y^0}) \cos(\widehat{y^0, \xi}) +$$
$$+ \cos(\widehat{y, z^0}) \cos(\widehat{z^0, \xi}) = \cos(\theta - \theta_0)(\sin\psi \cos\varkappa \sin\psi_0 \sin\varkappa_0 -$$
$$- \sin\varkappa \cos\varkappa_0) - \sin(\theta - \theta_0)(\sin\psi \cos\varkappa \cos\varkappa_0 +$$
$$+ \sin\varkappa \sin\psi_0 \sin\varkappa_0) + \cos\psi \cos\varkappa \cos\psi_0 \sin\varkappa_0. \qquad (1.6.12)$$

En introduisant les expressions (1.6.7) et (1.6.12) dans l'égalité (1.6.11), nous obtenons, après quelques transformations trigonométriques :

$$\cos(\widehat{x, \eta}) - \cos(\widehat{y, \xi}) = \cos(\varkappa - \varkappa_0) \sin(\theta - \theta_0)(\sin\psi + \sin\psi_0) +$$
$$+ \sin(\varkappa - \varkappa_0)[\cos(\theta - \theta_0)(\sin\psi \sin\psi_0 + 1) + \cos\psi \cos\psi_0] = 0. \qquad (1.6.13)$$

La dernière égalité peut être considérée comme une nouvelle équation qui permet de déterminer le cap vrai au gyrocompas $\varkappa_0$ du navire à partir des valeurs données des angles θ, ψ, $\varkappa$, ainsi que des angles θ_0 et ψ_0 (relativement à la deuxième forme constructive du compas gyroscopique). Si $\theta = \theta_0$, la relation (1.6.13) prend la forme

$$\sin(\varkappa - \varkappa_0)[1 + \cos(\psi - \psi_0)] = 0 \qquad (1.6.14)$$

dont il résulte l'égalité des angles $\varkappa$ et $\varkappa_0$ quelles que soient les valeurs des angles ψ, ψ_0, ainsi que le cap au compas $\varkappa$. Dans un cas assez particulier où $\psi = -\psi_0$, la relation (1.6.13) se simplifie également et devient

$$\sin(\varkappa - \varkappa_0) \cos^2\psi [1 + \cos(\theta - \theta_0)] = 0. \qquad (1.6.15)$$

Ici encore, mais déjà indépendamment des valeurs des angles θ, θ_0, $\psi = -\psi_0$ et $\varkappa$, on a l'égalité $\varkappa = \varkappa_0$. En développant dans (1.6.13) les fonctions trigonométriques des arguments $\theta - \theta_0$, ψ et ψ_0 en

série entière et en n'y gardant que des termes de premier et de deuxième ordre par rapport à ces variables, nous obtenons

$$\sin(\varkappa-\varkappa_0)\left[2-\frac{(\theta-\theta_0)^2+(\psi-\psi_0)^2}{2}\right]+$$
$$+(\theta-\theta_0)(\psi+\psi_0)\cos(\varkappa-\varkappa_0)=0. \quad (1.6.16)$$

Il ressort de cette égalité approchée que la différence cherchée $\varkappa-\varkappa_0$ est de deuxième ordre par rapport à $\theta-\theta_0$, ψ et ψ_0. Par suite, en rejetant comme précédemment les termes d'ordre supérieur au deuxième, par rapport aux mêmes grandeurs, nous obtenons pour l'erreur de quasi-cardan de la deuxième variante de construction du compas gyroscopique une formule simple suivante:

$$\varkappa-\varkappa_0=-\frac{1}{2}(\theta-\theta_0)(\psi+\psi_0). \quad (1.6.17)$$

Il est intéressant de noter qu'à la différence des formules valables pour la première variante, la différence $\varkappa-\varkappa_0$ est ici indépendante de la valeur du cap au compas $\varkappa$.

Les angles θ et θ_0 ne figurent dans l'équation (1.6.13) et dans sa solution approchée (1.6.17) que sous la forme de leur différence. La cause en est la même que dans le cas de l'équation (1.6.7) valable pour la première variante de construction du compas gyroscopique, et donc son interprétation géométrique est aussi la même.

Exemples numériques.— Considérons deux exemples numériques. Dans le premier, $\theta=8°$, $\psi=2°$, $\theta_0=4°$, $\psi_0=0$. De tels angles peuvent correspondre à une giration à gauche du navire avec un ralentissement de la marche. Dans le cas de la première variante de construction du compas gyroscopique, les calculs par la formule (1.6.10) donnent $\varkappa-\varkappa_0=\Delta\varkappa=-0{,}001828\cos\varkappa\times\times\sin\varkappa-0{,}002437\sin^2\varkappa$. En posant le cap au compas $\varkappa$ du navire égal à 45°, on est conduit à une correction $\varkappa-\varkappa_0$ égale à $-0{,}002132$ (—7,33′). La résolution directe de l'équation initiale (1.6.7) donne $\varkappa-\varkappa_0=-0{,}002136$ (—7,34′). Dans le cas de la deuxième variante de construction du compas gyroscopique, on obtient pour tous les caps une même correction: $\varkappa-\varkappa_0=-0{,}001218$ (—4,2′) si l'on fait les calculs d'après la formule approchée (1.6.17), et $\varkappa-\varkappa_0==-0{,}001219$ (—4,2′), c'est-à-dire pratiquement la même valeur, si l'on résout l'équation (1.6.13).

Examinons maintenant un autre exemple. Soient $\theta=\psi=0$, $\theta_0=8°$, $\psi_0=4°$, ce qui peut correspondre au cas d'un réservoir, immobile par rapport au navire, dont l'axe de la sphère d'asservissement z est perpendiculaire au plan x^0y^0 ou, ce qui revient au même, au plan du pont du navire. Lorsque $\theta=\psi=0$, la formule (1.6.10) prend la forme suivante: $\varkappa-\varkappa_0=\frac{1}{2}(\psi_0^2-\theta_0^2)\cos\varkappa\sin\varkappa+$ $+\theta_0\psi_0\cos^2\varkappa$. Pour $\varkappa=0$, la correction $\Delta\varkappa=0{,}009748$ (33,5′); pour le cap $\varkappa=90°$, elle s'annule et, pour le cap $\varkappa=-18°26{,}1'$, elle atteint sa valeur maximale $\Delta\varkappa=0{,}01097$ (37,7′). Dans la deuxième variante du gyrocompas, la correction est pour tous les caps la même et égale à l'expression $\varkappa-\varkappa_0=$ $=\frac{1}{2}\theta_0\psi_0=0{,}004872$ (16,8′).

Ces exemples montrent que la deuxième variante de construction du compas gyroscopique est aussi préférable à la première en ce qui concerne l'évaluation de l'importance théorique de l'erreur de quasi-cardan.

§ 7. Détermination analytique des erreurs dans la mesure de l'azimut et de l'angle d'élévation d'un objet observé, causées par un défaut de stabilisation horizontale

Considérons de nouveau deux suspensions à la cardan installées à bord d'un navire ou d'un autre véhicule. A la différence des cas examinés au cours des §§ 4 et 5 du présent chapitre, supposons que les bases des boîtiers des suspensions sont rigoureusement parallèles

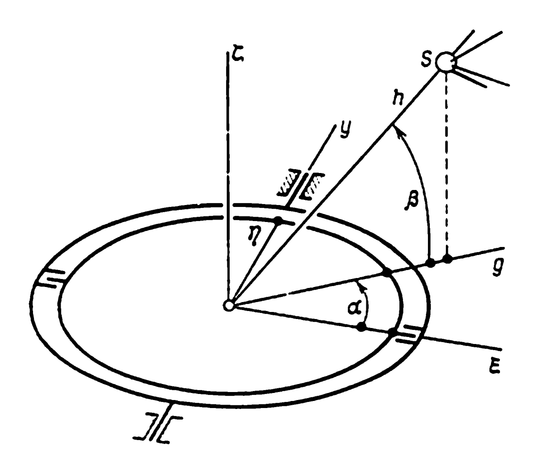


Fig. 27

l'une à l'autre et que les axes de leurs anneaux extérieurs sont parallèles à l'axe longitudinal du navire. Supposons également que seul l'anneau intérieur de la première suspension est assujetti à demeurer dans le plan horizontal. Quant au plan de l'anneau intérieur de la seconde suspension, il présente une pente de faible valeur sur le plan de l'anneau intérieur de la première suspension. De ce fait, l'azimut α et l'angle d'élévation β (fig. 27) d'un objet éloigné S, mesurés à l'aide de la première suspension, seront différents de l'azimut α' et de l'angle d'élévation β' enregistrés au moyen de la seconde suspension. Ici, de même qu'au § 5, par angle d'élévation on entend l'angle β que la direction de l'objet éloigné S fait avec sa projection g sur le plan $\xi\eta$ de l'anneau de cardan intérieur, et par azimut, l'angle α que la projection g fait avec l'axe ξ de l'anneau intérieur.

Dans ce qui suit, nous nous proposons de déterminer les différences

$$\Delta\alpha = \alpha' - \alpha, \quad \Delta\beta = \beta' - \beta, \tag{1.7.1}$$

que nous appellerons par la suite *erreur d'azimut* et *erreur d'angle d'élévation.*

Désignons comme précédemment par θ la bande du navire, par ψ son assiette, mesurées au moyen de la première suspension dont le plan de l'anneau intérieur est strictement horizontal, et par θ' et ψ' les angles analogues mesurés à l'aide de la seconde suspension. Les différences

$$\Delta\theta = \theta' - \theta, \quad \Delta\psi = \psi' - \psi \tag{1.7.2}$$

caractérisent le défaut de stabilisation horizontale du plan de l'anneau intérieur de la seconde suspension.

Considérons un segment h de longueur unité porté par la demi-droite issue du centre géométrique de la première suspension et dirigée vers S (v. fig. 27). Les projections de ce segment sur les axes ξ, η et ζ liés à l'anneau intérieur de la première suspension ont pour valeurs

$$\begin{aligned} h_\xi &= \cos\alpha\cos\beta, \\ h_\eta &= \sin\alpha\cos\beta, \\ h_\zeta &= \sin\beta. \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

Utilisons la table des cosinus des angles (1.3.1) que les axes du système $\xi\eta\zeta$ font avec ceux du système xyz lié au boîtier de la première suspension. On a

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ \xi & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ \eta & -\sin\theta\sin\psi & \cos\psi & \cos\theta\sin\psi \\ \zeta & -\sin\theta\cos\psi & -\sin\psi & \cos\theta\cos\psi. \end{array} \tag{1.7.4}$$

On peut maintenant déterminer les projections du même segment h sur les axes x, y et z. Il est aisé de s'assurer que

$$\begin{aligned} h_x &= \cos\alpha\cos\beta\cos\theta - \sin\alpha\cos\beta\sin\theta\sin\psi - \\ &\qquad - \sin\beta\sin\theta\cos\psi, \\ h_y &= \sin\alpha\cos\beta\cos\psi - \sin\beta\sin\psi, \\ h_z &= \cos\alpha\cos\beta\sin\theta + \sin\alpha\cos\beta\cos\theta\sin\psi + \\ &\qquad + \sin\beta\cos\theta\cos\psi. \end{aligned} \tag{1.7.5}$$

Les axes correspondants des systèmes de coordonnées xyz et $x'y'z'$ liés respectivement aux boîtiers de la première et de la seconde suspension sont par hypothèse rigoureusement parallèles. Par consé-

quent, en se servant encore une fois de la table (1.4.3), c'est-à-dire de la table

$$\begin{array}{cccc} & x' & y' & z' \\ \xi' & \cos\theta' & 0 & \sin\theta' \\ \eta' & -\sin\theta'\sin\psi' & \cos\psi' & \cos\theta'\sin\psi' \\ \zeta' & -\sin\theta'\cos\psi' & -\sin\psi' & \cos\theta'\cos\psi', \end{array} \qquad (1.7.6)$$

on peut obtenir les expressions suivantes pour les projections du segment h sur les axes ξ', η' et ζ':

$$h_{\xi'} = (\cos\alpha\cos\beta\cos\theta - \sin\alpha\cos\beta\sin\theta\sin\psi - \\ - \sin\beta\sin\theta\cos\psi)\cos\theta' + (\cos\alpha\cos\beta\sin\theta + \\ + \sin\alpha\cos\beta\cos\theta\sin\psi + \sin\beta\cos\theta\cos\psi)\sin\theta',$$

$$h_{\eta'} = -(\cos\alpha\cos\beta\cos\theta - \sin\alpha\cos\beta\sin\theta\sin\psi - \\ - \sin\beta\sin\theta\cos\psi)\sin\theta'\sin\psi' + (\sin\alpha\cos\beta\cos\psi - \\ - \sin\beta\sin\psi)\cos\psi' + (\cos\alpha\cos\beta\sin\theta + \\ + \sin\alpha\cos\beta\cos\theta\sin\psi + \sin\beta\cos\theta\cos\psi)\cos\theta'\sin\psi',$$

$$h_{\zeta'} = -(\cos\alpha\cos\beta\cos\theta - \sin\alpha\cos\beta\sin\theta\sin\psi - \\ - \sin\beta\sin\theta\cos\psi)\sin\theta'\cos\psi' - (\sin\alpha\cos\beta\cos\psi - \\ - \sin\beta\sin\psi)\sin\psi' + (\cos\alpha\cos\beta\sin\theta + \sin\alpha\cos\beta\cos\theta\sin\psi + \\ + \sin\beta\cos\theta\cos\psi)\cos\theta'\cos\psi'. \qquad (1.7.7)$$

D'autre part, les mêmes projections $h_{\xi'}$, $h_{\eta'}$, $h_{\zeta'}$ peuvent être exprimées par l'intermédiaire des angles α' et β', c'est-à-dire par l'azimut et l'angle d'élévation enregistrés au moyen de la seconde suspension. Par analogie avec les formules (1.7.3) on peut écrire

$$h_{\xi'} = \cos\alpha'\cos\beta', \quad h_{\eta'} = \sin\alpha'\cos\beta', \quad h_{\zeta'} = \sin\beta'. \qquad (1.7.8)$$

Le rapprochement entre les formules (1.7.7) et (1.7.8) donne, après simplifications évidentes, trois relations suivantes:

$$\cos\alpha'\cos\beta' = \cos\alpha\cos\beta\cos(\theta' - \theta) + \\ + (\sin\alpha\cos\beta\sin\psi + \sin\beta\cos\psi)\sin(\theta' - \theta),$$

$$\sin\alpha'\cos\beta' = -\cos\alpha\cos\beta\sin\psi'\sin(\theta' - \theta) + \\ + (\sin\alpha\cos\beta\sin\psi + \sin\beta\cos\psi)\sin\psi'\cos(\theta' - \theta) + \\ + (\sin\alpha\cos\beta\cos\psi - \sin\beta\sin\psi)\cos\psi'.$$

$$\sin\beta' = -\cos\alpha\cos\beta\cos\psi'\sin(\theta' - \theta) + \\ + (\sin\alpha\cos\beta\sin\psi + \sin\beta\cos\psi)\cos\psi'\cos(\theta' - \theta) - \\ - (\sin\alpha\cos\beta\cos\psi - \sin\beta\sin\psi)\sin\psi' \qquad (1.7.9)$$

qui relient les angles α' et β' aux angles α, β, θ, ψ, θ' et ψ'. Ces relations, dont chacune est une conséquence des deux autres, permettent de calculer les angles α' et β' à partir des valeurs données des angles α, β, θ, ψ, θ', ψ' et donc de résoudre rigoureusement le problème posé de la détermination des erreurs $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$ définies par les formules (1.7.1).

Passons maintenant à l'établissement des formules approchées. En utilisant les développements en série de Taylor, remplaçons dans les relations (1.7.9) les fonctions trigonométriques des arguments α', β', ψ' et $\theta' - \theta = \Delta\theta$ par leurs représentations approchées à des termes de premier ordre par rapport aux différences $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\psi$ et $\Delta\theta$ près. Par exemple, remplaçons $\sin\alpha'$ par $\sin\alpha + \Delta\alpha\cos\beta$, $\sin(\theta' - \theta)$ par $\Delta\theta$, etc. Ainsi, en rejetant les termes de deuxième ordre et d'ordre supérieur par rapport aux différences mentionnées, nous obtenons les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} -\Delta\alpha\sin\alpha\cos\beta - \Delta\beta\cos\alpha\sin\beta &= \\ &= \Delta\theta(\sin\alpha\cos\beta\sin\psi + \sin\beta\cos\psi), \\ \Delta\alpha\cos\alpha\cos\beta - \Delta\beta\sin\alpha\sin\beta &= \\ &= -\Delta\theta\cos\alpha\cos\beta\sin\psi + \Delta\psi\sin\beta, \quad (1.7.10) \\ \Delta\beta\cos\beta = -\Delta\theta\cos\alpha\cos\beta\cos\psi &- \Delta\psi\sin\alpha\cos\beta. \end{aligned}$$

La dernière de ces égalités conduit immédiatement à la formule

$$\Delta\beta = -\Delta\theta\cos\alpha\cos\psi - \Delta\psi\sin\alpha. \qquad (1.7.11)$$

Introduisons maintenant dans les deux premières égalités (1.7.10) l'expression que nous venons de trouver pour $\Delta\beta$ et résolvons chacune d'elles par rapport à $\Delta\alpha$. Comme il fallait s'y attendre, nous obtenons une même formule:

$$\Delta\alpha = -\Delta\theta(\sin\psi + \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\cos\psi) + \Delta\psi\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta. \quad (1.7.12)$$

En remplaçant dans les égalités (1.7.11) et (1.7.12) les fonctions trigonométriques $\sin\psi$ et $\cos\psi$ respectivement par ψ et $1 - \psi^2/2$, nous obtenons pour $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$ les formules approchées suivantes:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= -\Delta\theta\psi - (\Delta\theta\sin\alpha - \Delta\psi\cos\alpha)\,\mathrm{tg}\,\beta + \frac{1}{2}\Delta\theta\psi^2\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta, \\ \Delta\beta &= \frac{1}{2}\Delta\theta\psi^2\cos\alpha - \Delta\theta\cos\alpha - \Delta\psi\sin\alpha. \end{aligned} \qquad (1.7.13)$$

Exemple numérique.— Soient $\Delta\psi = \Delta\theta = 0{,}5°$, $\psi = 7°$, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$. En calculant à l'aide des formules approchées (1.7.11), (1.7.12),

on obtient $\Delta\alpha = -0{,}002875$ $(-9{,}9')$; $\Delta\beta = -0{,}01189$ $(-40{,}9')$, alors que les formules moins exactes (1.7.13) donnent $\Delta\alpha = -0{,}002878$ $(-9{,}9')$, $\Delta\beta =$ $= -0{,}01189$ $(-40{,}9')$. Si pour calculer les erreurs cherchées dans la détermination de l'azimut et de l'angle d'élévation, on se sert des relations exactes (1.7.9) et des égalités (1.7.1), on obtient $\Delta\alpha = -0{,}002876$ $(-9{,}9')$ et $\Delta\beta = -0{,}01189$ $(-40{,}9')$. Ainsi, dans le cas considéré, les formules exactes et les formules approchées donnent pratiquement les mêmes résultats.

Les formules (1.7.11) et (1.7.12) ne font pas intervenir l'angle θ, c'est-à-dire la bande du navire. La raison pour laquelle les différences cherchées $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$ sont indépendantes de la bande θ peut être expliquée par une voie purement géométrique à l'aide des raisonnements analogues à ceux que l'on a développés au § 5 du présent chapitre. En effet, supposons que, le cap et l'assiette étant fixes, le navire change de bande, par exemple effectue une certaine rotation autour de son axe longitudinal. Vu que cette rotation ne change pas la direction de l'axe de l'anneau extérieur de la première (ainsi que de la seconde) suspension, l'orientation de l'anneau intérieur, stabilisé à l'horizontale, de la première suspension et l'orientation de son anneau extérieur resteront inchangées. Supposons également que les différences $\Delta\theta$ et $\Delta\psi$ définies par les égalités (1.7.2) conservent, elles aussi, leurs valeurs. Dans ce cas, l'orientation des anneaux de la seconde suspension ne sera pas dérangée, elle non plus. En effet, l'anneau extérieur de la seconde suspension est tourné par rapport à celui de la première de l'angle $\Delta\theta$ autour de l'axe parallèle à l'axe longitudinal du navire. Il s'ensuit que sa position est indépendante de la bande du navire, à condition que la position de l'axe longitudinal reste inchangée. Il en est exactement de même pour l'anneau intérieur de la seconde suspension dont la position par rapport à l'anneau extérieur de cette suspension se détermine par l'angle

$$\psi' = \psi + \Delta\psi \tag{1.7.14}$$

dont la valeur reste, dans ce cas, invariable. En vertu de ce qui précède, l'azimut α et l'angle d'élévation β de l'objet éloigné S, mesurés à l'aide de la première suspension à la cardan, sont indépendants de la bande θ du navire, si son assiette ψ et son cap $\varkappa$ (v. § 1 du présent chapitre) restent inchangés. Il en est de même pour l'azimut α' et l'angle d'élévation β' enregistrés au moyen de la seconde suspension à la cardan. Ainsi, les différences $\Delta\alpha = \alpha' - \alpha$ et $\Delta\beta =$ $= \beta' - \beta$ ne peuvent dépendre que de la différence $\Delta\theta = \theta' - \theta$. C'est ce que montrent les formules approchées (1.7.11), (1.7.12) et (1.7.13) et évidemment les relations exactes (1.7.9) qui servent à calculer les quantités α' et β'. Pour la raison que nous venons d'exposer, les cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes $\xi\eta\zeta$ et $\xi'\eta'\zeta'$ liés respectivement aux anneaux intérieurs des suspensions à la cardan examinées ne doivent dépendre, eux aussi, que de

la différence $\theta' - \theta$. En tenant compte du parallélisme des axes correspondants des systèmes xyz et $x'y'z'$ et en se servant des tables (1.7.6) et (1.7.4), on obtient, par exemple

$$\cos(\widehat{\eta, \zeta'}) = \cos(\widehat{\eta, x})\cos(\widehat{x, \zeta'}) + \cos(\widehat{\eta, y})\cos(\widehat{y, \zeta'}) + \\ + \cos(\widehat{\eta, z})\cos(\widehat{z, \zeta'}) = \sin\theta\sin\psi\sin\theta'\cos\psi' - \cos\psi\sin\psi' + \\ + \cos\theta\sin\psi\cos\theta'\cos\psi' = \sin\psi\cos\psi'\cos\Delta\theta - \cos\psi\sin\psi', \quad (1.7.15)$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\xi, \xi'}) &= \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' = \cos\Delta\theta, \\ \cos(\widehat{\xi, \eta'}) &= -\cos\theta\sin\theta'\sin\psi' + \sin\theta\cos\theta'\sin\psi' = \\ &= -\sin\Delta\theta\sin\psi', \end{aligned} \quad (1.7.16)$$

etc.

En faisant usage des formules (1.7.15), (1.7.16) et des formules analogues, on peut obtenir la table des cosinus des angles formés par les axes des systèmes $\xi'\eta'\zeta'$ et $\xi\eta\zeta$, qui est de la forme suivante :

	ξ	η	ζ
ξ'	$\cos\Delta\theta$	$\sin\Delta\theta\sin\psi$	$\sin\Delta\theta\cos\psi$
η'	$-\sin\Delta\theta\sin\psi'$	$\cos\Delta\theta\sin\psi\sin\psi' + \cos\psi\cos\psi'$	$\cos\Delta\theta\cos\psi\sin\psi' - \sin\psi\cos\psi'$
ζ'	$-\sin\Delta\theta\cos\psi'$	$\cos\Delta\theta\sin\psi\cos\psi' - \cos\psi\sin\psi'$	$\cos\Delta\theta\cos\psi\cos\psi' + \sin\psi\sin\psi'$.

(1.7.17)

Si l'on n'y garde que les termes de premier ordre par rapport aux différences $\Delta\theta$ et $\psi' - \psi = \Delta\psi$ on obtient la table

	ξ	η	ζ
ξ'	1	$\Delta\theta\sin\psi$	$\Delta\theta\cos\psi$
η'	$-\Delta\theta\sin\psi$	1	$\Delta\psi$
ζ'	$-\Delta\theta\cos\psi$	$-\Delta\psi$	1.

(1.7.18)

Cette table peut servir, après qu'on y remplace $\sin\psi$ par ψ et $\cos\psi$ par $1 - \frac{1}{2}\psi^2$, à établir, un peu différemment, les formules (1.7.11) et (1.7.12) sans avoir à calculer les projections (1.7.5) du segment h sur les axes du système xyz lié au boîtier de la première suspension. A cet effet, il suffit d'exprimer, à l'aide de la table (1.7.18), les projections $h_{\xi'}$, $h_{\eta'}$, $h_{\zeta'}$ par h_ξ, h_η, h_ζ et d'utiliser les formules (1.7.3) et (1.7.8).

Au cours de ce paragraphe nous avons supposé que les boîtiers des suspensions étaient montés l'un par rapport à l'autre avec une grande précision. S'il n'en est pas ainsi, on doit tenir compte de ce qui a été établi au § 4 du présent chapitre, à savoir on doit ajouter aux quantités $\Delta\theta$ et $\Delta\psi$ figurant dans les formules approchées (1.7.11), (1.7.12) et (1.7.13) les seconds membres correspondants des formules (1.4.22) ou (1.4.23).

§ 8. Détermination géométrique des erreurs de stabilisation du viseur à l'aide de la théorie des rotations infiniment petites du corps solide

Certains problèmes examinés au cours des paragraphes qui précèdent peuvent être résolus de façon relativement simple par voie géométrique, à l'aide des propositions élémentaires de la théorie des rotations infiniment petites des corps solides. On sait qu'une rotation infiniment petite d'un solide peut être représentée par un vecteur dirigé suivant l'axe de cette rotation. Si l'on fait subir au corps plusieurs rotations infiniment petites autour des axes qui se coupent en un même point, celles-ci peuvent être remplacées par une seule rotation dont le vecteur est la somme géométrique des vecteurs des rotations considérées, quel que soit l'ordre dans lequel ont été effectuées ces rotations. D'une façon approchée, cette proposition peut s'appliquer également à de petites rotations du corps solide. Remarquons que la position du solide après plusieurs rotations finies dépend de l'ordre dans lequel ces rotations ont été effectuées [1]. Pourtant, dans le cas de petites rotations, la différence de position du corps due au changement de l'ordre des rotations est une quantité infiniment petite de deuxième ordre. Pour faire disparaître une telle différence de position, il suffit de donner au corps une rotation supplémentaire autour d'un axe convenablement choisi, d'un angle infiniment petit de deuxième ordre par rapport aux angles des rotations considérées. Aussi, de petites rotations du solide peuvent-elles également être représentées par des vecteurs orientés suivant les axes de rotation correspondants.

Soit un corps effectuant une rotation dont le vecteur est égal à la somme géométrique des vecteurs de petites rotations données. Dans ce cas, la position du corps différera de celle qu'il prendra par une rotation infiniment petite de deuxième ordre si ces rotations sont effectuées successivement l'une après l'autre dans un ordre

[1] On a en vue des rotations autour des axes fixes. La proposition susmentionnée est également valable (v. chap. II, § 3) si tous les axes sont liés au corps. Pourtant si, par exemple, l'un des axes est immobile et l'autre est lié au corps, l'ordre dans lequel sont effectuées les rotations est sans importance (v. tome II, chap. V, § 2).

quelconque. La même remarque s'applique également au cas de la décomposition du vecteur d'une petite rotation du solide en plusieurs vecteurs composants.

Considérons à titre d'un premier exemple, la construction de la table des cosinus des angles formés par les axes de deux systèmes de coordonnées $\xi\eta\zeta$ et $\xi'\eta'\zeta'$ dont le second est obtenu du premier par rotation de petit angle ρ autour d'un axe quelconque. Désignons par la même lettre ρ le vecteur correspondant à cette rotation (fig. 28).

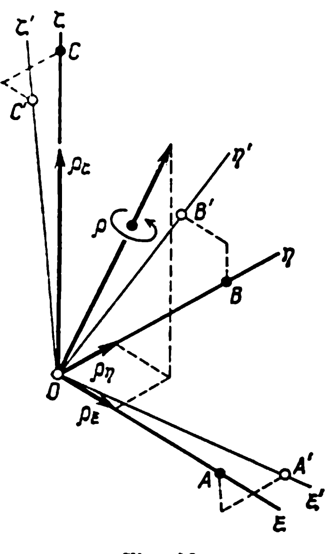


Fig. 28

Soient ρ_ξ, ρ_η et ρ_ζ les composantes du vecteur ρ suivant les axes de coordonnées ξ, η et ζ et soient A, B et C les points respectifs de ces axes, situés par rapport à l'origine à des distances égales à l'unité. Désignons par A', B' et C' les positions que ces points prennent après que le système $\xi\eta\zeta$ tourne de l'angle ρ et vient occuper la position $\xi'\eta'\zeta'$. En examinant la figure 28, il n'est pas difficile de voir que, rapportés au système $\xi\eta\zeta$, les points A', B' et C' ont pour coordonnées, à des termes de premier ordre en ρ_ξ, ρ_η et ρ_ζ près,

$$\begin{array}{llll} A' (& 1, & \rho_\zeta, & -\rho_\eta), \\ B' (& -\rho_\zeta, & 1, & \rho_\xi), \\ C' (& \rho_\eta, & -\rho_\xi, & 1). \end{array} \tag{1.8.1}$$

En effet, le point A ne change pas de position lors de la rotation du système $\xi\eta\zeta$ de petit angle ρ_ξ autour de l'axe ξ, il se déplace de la distance ρ_η dans le sens des ζ négatifs par suite de la rotation de petit angle ρ_η autour de l'axe η (en sens inverse des aiguilles d'une montre pour un observateur placé du côté de la partie positive de l'axe η) et enfin, A se déplace de la distance ρ_ζ dans le sens des η positifs lorsque la rotation s'effectue du petit angle ρ_ζ autour de l'axe ζ. Les segments OA', OB' et OC' déterminés par les coordonnées des points A', B' et C' qui viennent d'être calculées, sont de longueur unité à des infiniment petits de deuxième ordre en ρ_ξ, ρ_η et ρ_ζ près. En effet, par exemple

$$OA' = \sqrt{1+\rho_\zeta^2+\rho_\eta^2} \simeq 1. \tag{1.8.2}$$

Ainsi, les coordonnées du point A' par rapport au système $\xi\eta\zeta$, c'est-à-dire les quantités 1, ρ_ζ et $-\rho_\eta$ sont à la fois les projections sur les axes ξ, η et ζ du segment unitaire porté par l'axe ξ'. Il en résulte que ces quantités sont égales respectivement aux cosinus des angles

que l'axe ξ' fait avec les axes ξ, η et ζ. On peut développer les mêmes raisonnements en ce qui concerne les coordonnées des points B' et C' situés respectivement sur les axes η' et ζ'. Finalement, en utilisant les coordonnées (1.8.1) des points A', B', C', on peut construire la table des cosinus des angles formés par les axes des systèmes de coordonnées $\xi'\eta'\zeta'$ et $\xi\eta\zeta$, soit:

$$\begin{array}{cccc} & \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & 1 & \rho_\zeta & -\rho_\eta \\ \eta' & -\rho_\zeta & 1 & \rho_\xi \\ \zeta' & \rho_\eta & -\rho_\xi & 1. \end{array} \qquad (1.8.3)$$

Au paragraphe précédent, nous avons construit la table (1.7.18) des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes de coordonnées $\xi'\eta'\zeta'$ et $\xi\eta\zeta$ liés aux anneaux intérieurs de deux suspensions à la cardan dont les axes des anneaux extérieurs étaient parallèles. En le faisant, on supposait que les angles θ et θ' de rotation des anneaux extérieurs de ces suspensions par rapport à leurs boîtiers différaient par une petite quantité $\Delta\theta$ (angle que font entre eux les plans de ces anneaux) et que les angles ψ et ψ' de rotation des anneaux intérieurs par rapport aux anneaux extérieurs ne différaient, eux aussi, que par une petite quantité $\Delta\psi$. Montrons maintenant comment on peut obtenir la table (1.7.18) en partant des considérations de nature géométrique qui ont servi à établir la table (1.8.3).

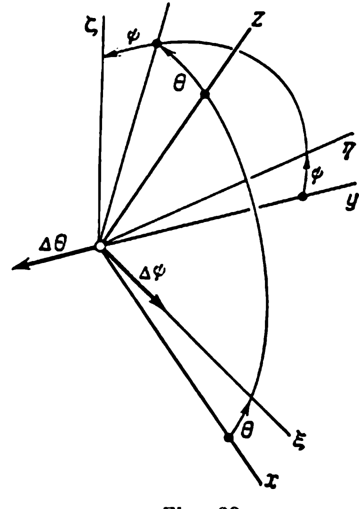


Fig. 29

Du point de vue de la théorie des petites rotations du corps solide, la position du système de coordonnées $\xi'\eta'\zeta'$ coïncide (à un changement d'origine près) avec la position que prend le système $\xi\eta\zeta$ lorsqu'il tourne autour de l'axe y (v. fig. 29) de l'anneau extérieur de la première suspension d'un petit angle $\Delta\theta$ et ensuite autour de l'axe de l'anneau intérieur ξ d'un petit angle $\Delta\psi$.

L'axe y autour duquel les anneaux extérieur et intérieur tournent ensemble d'un petit angle $\Delta\theta$, fait avec les axes ξ, η et ζ des angles dont les cosinus sont égaux d'après la figure 29 ou la table (1.1.4) à

$$0, \quad \cos\psi, \quad -\sin\psi. \qquad (1.8.4)$$

Conformément aux conventions adoptées au § 1 du présent chapitre, l'angle θ est considéré comme positif si l'anneau de cardan extérieur tourne par rapport à son boîtier dans le sens des aiguilles d'une montre lorsqu'on l'observe du côté de la partie positive de l'axe y. Aussi, suivant les règles de la théorie des petites rotations, le vecteur $\Delta\theta$ doit-il être orienté dans le sens négatif de l'axe y. Il peut être décomposé en deux rotations suivantes: autour de l'axe η de l'angle $-\Delta\theta \cos\psi$ et autour de l'axe ζ de l'angle $\Delta\theta \sin\psi$.

L'anneau intérieur effectue par rapport à l'anneau extérieur une petite rotation $\Delta\psi$ autour de l'axe ξ. La rotation $\Delta\psi$, de même que l'angle ψ, sera considérée comme positive si l'anneau intérieur tourne en sens inverse des aiguilles d'une montre, lorsqu'on l'observe du côté de la partie positive de l'axe ξ. Le vecteur $\Delta\psi$ doit être orienté dans le même sens. Il en résulte que les composantes du vecteur ρ de la rotation supplémentaire de l'anneau intérieur de la première suspension (et du système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ qui lui est lié) s'expriment, dans le cas des petites variations des angles θ et ψ, par les formules

$$\rho_\xi = \Delta\psi, \quad \rho_\eta = -\Delta\theta \cos\psi, \quad \rho_\zeta = \Delta\theta \sin\psi. \tag{1.8.5}$$

Ces formules sont équivalentes, à des termes de deuxième ordre en ψ près, aux formules suivantes:

$$\rho_\xi = \Delta\psi, \quad \rho_\eta = -\Delta\theta\left(1 - \frac{1}{2}\psi^2\right), \quad \rho_\zeta = \Delta\theta\psi. \tag{1.8.6}$$

Puisque la rotation de petit angle ρ met le système $\xi\eta\zeta$ dans la position $\xi'\eta'\zeta'$, la table des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes $\xi'\eta'\zeta'$ et $\xi\eta\zeta$ peut être construite à partir de la table (1.8.3). En tenant compte de la formule (1.8.5), on est conduit de nouveau à la table (1.7.18) obtenue au § 7 à l'aide des considérations purement analytiques. Si l'on y remplace $\sin\psi$ par ψ et $\cos\psi$ par $1 - \frac{1}{2}\psi^2$, cette table prend la forme

$$\begin{array}{cccc} & \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & 1 & \Delta\theta\psi & \Delta\theta\left(1 - \frac{1}{2}\psi^2\right) \\ \eta' & -\Delta\theta\psi & 1 & \Delta\psi \\ \zeta' & -\Delta\theta\left(1 - \frac{1}{2}\psi^2\right) & -\Delta\psi & 1. \end{array} \tag{1.8.7}$$

Cette table, on peut, bien entendu, l'obtenir en remplaçant, dans la table (1.8.3), les quantités ρ_ξ, ρ_η, ρ_ζ par leurs valeurs approchées calculées suivant les formules (1.8.6).

En utilisant la théorie des petites rotations, on doit faire particulièrement attention à la détermination de celui des corps ciné-

matiquement liés auquel se rapporte chacune des rotations considérées. Sauf cette précaution, on risque de commettre une erreur grossière. Par exemple, dans le cas de la suspension par bicardan (v. § 2, du présent chapitre, fig. 7), il serait tout à fait erroné de considérer une petite rotation de l'anneau intérieur comme étant composée de deux petites rotations: $\Delta\Phi$ autour de l'axe x de l'anse et $\Delta\vartheta$ autour de l'axe y de l'anneau extérieur. En tenant compte de la table (1.2.6), on pourrait obtenir, pour les composantes de la petite rotation de l'anneau intérieur, les formules suivantes:

$$\begin{aligned} \rho_\xi &= \Delta\Phi \cos\vartheta, \\ \rho_\eta &= \Delta\Phi \frac{1}{R} \sin\Phi \sin\vartheta \cos\vartheta + \Delta\vartheta \frac{1}{R} \cos\Phi, \\ \rho_\zeta &= \Delta\Phi \frac{1}{R} \cos\Phi \sin\vartheta - \Delta\vartheta \frac{1}{R} \sin\Phi \cos\vartheta. \end{aligned} \tag{1.8.8}$$

Pourtant, ces formules ne sont pas valables. L'erreur y réside en ce qu'en cas de variation de l'angle Φ, l'angle ϑ étant fixe, l'anneau intérieur ne tourne pas autour de l'axe x (sauf le cas où $\vartheta = 0$); c'est l'anse qui tourne autour de cet axe. De même, lorsque l'angle Φ est fixe et l'angle ϑ varie, les axes de rotation des anneaux intérieur et extérieur de la suspension par bicardan ne se confondent pas (sauf, bien entendu, le cas où $\Phi = 0$). Pour obtenir un résultat exact, il convient d'avoir recours aux formules (1.8.5) et, en se servant des formules (1.2.1), (1.2.3) et (1.2.4), d'exprimer les quantités $\Delta\theta$ et $\Delta\psi$ par Φ, ϑ, $\Delta\Phi$ et $\Delta\vartheta$. Tous calculs faits, on obtient au lieu des formules (1.8.8) les formules exactes suivantes:

$$\begin{aligned} \rho_\xi &= (\Delta\Phi \cos\vartheta - \Delta\vartheta \sin\Phi \cos\Phi \sin\vartheta) \frac{1}{R^2}, \\ \rho_\eta &= \Delta\vartheta \frac{1}{R} \cos\Phi, \\ \rho_\zeta &= -\Delta\vartheta \frac{1}{R} \sin\Phi \cos\vartheta, \\ (R &= \sqrt{1 - \sin^2\vartheta \sin^2\Phi}). \end{aligned} \tag{1.8.9}$$

Considérons maintenant le problème de la variation des coordonnées polaires α et β d'un point éloigné S (fig. 30), due à un défaut de stabilisation horizontale [1]). Plaçons sur l'anneau de cardan intérieur un viseur dont l'axe optique passe par le centre géométrique de la suspension et est orienté vers le point éloigné S. De par la définition même donnée au § 7 du présent chapitre, l'angle d'élévation β est l'angle que l'axe optique v du viseur fait avec le plan $\xi\eta$ de l'anneau intérieur de la suspension, tandis que l'azimut α est égal à l'angle formé par l'axe ξ de l'anneau intérieur avec la projec-

[1]) C'est-à-dire le même problème qui a été résolu au § 7 par voie analytique.

tion g de l'axe optique sur le plan de l'anneau intérieur de la suspension. Quant à l'angle que l'axe u du tourillon de viseur, situé dans le plan de l'anneau intérieur, fait avec l'axe ξ, il est égal à $\pi/2 - \alpha$.

Faisons varier, d'une petite quantité $\Delta\psi$, l'angle ψ, c'est-à-dire l'angle de rotation de l'anneau de cardan intérieur autour de son axe ξ par rapport à l'anneau extérieur. Soit par ailleurs $\Delta\theta$ un angle de faible valeur dont varie l'angle θ de rotation de l'anneau extérieur de la suspension autour de son axe y (l'angle θ étant compté

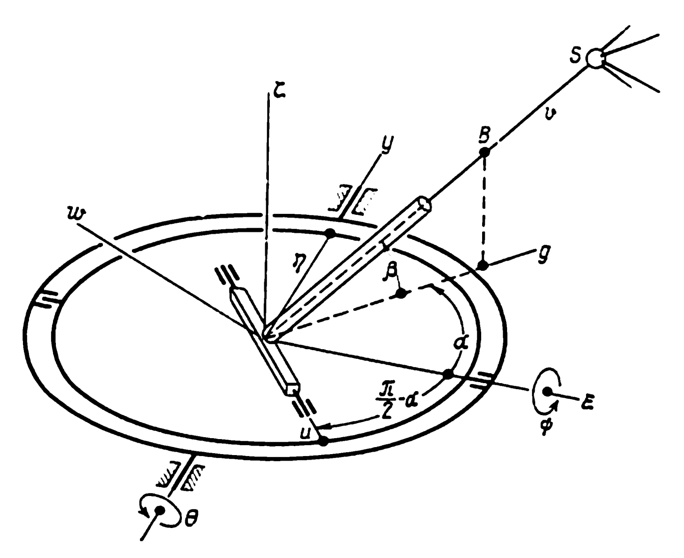


Fig. 30

à partir du pont du navire). Il s'ensuit de ces variations que la stabilisation de l'anneau intérieur de la suspension dans le plan horizontal se trouve perturbée. Pour faire revenir l'axe optique du viseur dans sa position initiale, il faut faire tourner d'un certain angle $\Delta\alpha$ (fig. 31) la plate-forme du viseur autour de la nouvelle direction de l'axe ζ (c'est-à-dire autour de la perpendiculaire au plan de l'anneau intérieur) et faire varier l'angle d'élévation β du viseur d'une certaine quantité $\Delta\beta$, en faisant tourner le viseur autour de l'axe de son tourillon. Les quantités $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$ sont des variations des coordonnées polaires α et β du point S, qui interviennent du fait que l'anneau intérieur de la suspension s'est écarté de sa position horizontale d'angles $\Delta\theta$ et $\Delta\psi$.

Associons au viseur (v. fig. 30 et 31) un repère direct uvw dont l'axe u est orienté, comme il a été dit précédemment, suivant l'axe du tourillon de viseur, et l'axe v suivant l'axe optique. Considérons

maintenant le déplacement angulaire du système de coordonnées uvw, donc du viseur, par suite de variations des angles θ, ψ, α et β.

Désignons par ρ^0 le vecteur petite rotation de l'anneau intérieur de la suspension, dû aux variations des angles θ et ψ des quantités $\Delta\theta$ et $\Delta\psi$. En ne gardant que des termes de premier et de deuxième ordres en $\Delta\theta$, $\Delta\psi$, θ et ψ, on peut, en partant de la formule (1.8.5), représenter les composantes de cette rotation sous la forme

$$\rho_\xi^0 = \Delta\psi, \quad \rho_\eta^0 = -\Delta\theta, \quad \rho_\zeta^0 = \Delta\theta\psi. \qquad (1.8.10)$$

Le déplacement angulaire du viseur, dû uniquement à la variation des angles θ et ψ, sera évidemment le même que celui de l'anneau intérieur de la suspension. En examinant attentivement la

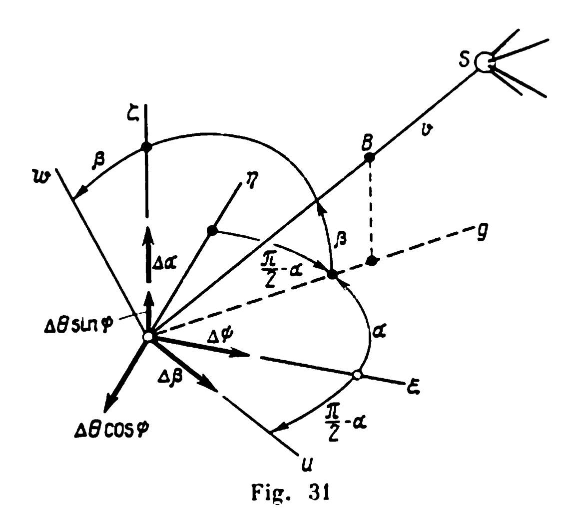


Fig. 31

la figure 31, on peut se convaincre que les composantes de ce déplacement angulaire suivant les axes u, v et w sont respectivement égales aux quantités suivantes:

$$\begin{aligned} \rho_u^0 &= \rho_\xi^0 \sin\alpha - \rho_\eta^0 \cos\alpha, \\ \rho_v^0 &= (\rho_\xi^0 \cos\alpha + \rho_\eta^0 \sin\alpha)\cos\beta + \rho_\zeta^0 \sin\beta, \qquad (1.8.11) \\ \rho_w^0 &= -(\rho_\xi^0 \cos\alpha + \rho_\eta^0 \sin\alpha)\sin\beta + \rho_\zeta^0 \cos\beta. \end{aligned}$$

En se servant ici des formules (1.8.10), on peut représenter les mêmes composantes sous la forme

$$\begin{aligned} \rho_u^0 &= \Delta\psi \sin\alpha + \Delta\theta \cos\alpha, \\ \rho_v^0 &= (\Delta\psi \cos\alpha - \Delta\theta \sin\alpha)\cos\beta + \Delta\theta\psi \sin\beta, \qquad (1.8.12) \\ \rho_w^0 &= -(\Delta\psi \cos\alpha - \Delta\theta \sin\alpha)\sin\beta + \Delta\theta\psi \cos\beta. \end{aligned}$$

Une petite variation de l'angle α entraîne une rotation du viseur avec sa plate-forme autour de l'axe ζ; une petite variation de l'angle β correspond à une rotation du tourillon autour de son axe, c'est-à-dire autour de l'axe u. Par suite (v. fig. 31), le vecteur déplacement angulaire ρ' du viseur, défini par les variations des angles α et β a pour composantes suivant les axes u, v et w:

$$\rho'_u = \Delta\beta, \quad \rho'_v = \Delta\alpha \sin\beta, \quad \rho'_w = \Delta\alpha\cos\beta. \qquad (1.8.13)$$

En établissant ces dernières formules on a tenu compte du fait que pour $\Delta\alpha > 0$ la rotation supplémentaire de la plate-forme du viseur s'effectue en sens inverse des aiguilles d'une montre (lorsque la rotation est observée du côté de la partie positive de l'axe ζ) et que pour $\Delta\beta > 0$ le viseur tourne autour de l'axe u en sens inverse des aiguilles d'une montre (lorsque la rotation est observée du côté de la partie positive de u).

Le vecteur déplacement angulaire total ρ du viseur, dû à la variation de tous les angles, c'est-à-dire des angles θ, ψ, α et β, est égal, en vertu des remarques faites au début du présent paragraphe sur la composition des petites rotations, à la somme géométrique des vecteurs ρ^0 et ρ'. Conformément aux expressions (1.8.12) et (1.8.13), les composantes de cette rotation totale suivant les axes u, v et w ont pour valeurs

$$\begin{aligned}\rho_u &= \rho_u^0 + \rho'_u = \Delta\psi\sin\alpha + \Delta\theta\cos\alpha + \Delta\beta,\\ \rho_v &= \rho_v^0 + \rho'_v = (\Delta\psi\cos\alpha - \Delta\theta\sin\alpha)\cos\beta + \Delta\theta\psi\sin\beta + \Delta\alpha\sin\beta,\\ \rho_w &= \rho_w^0 + \rho'_w = (\Delta\theta\sin\alpha - \Delta\psi\cos\alpha)\sin\beta + \Delta\theta\psi\cos\beta + \Delta\alpha\cos\beta.\end{aligned} \qquad (1.8.14)$$

Par analogie avec les expressions (1.8.1), les déplacements suivant les axes u, v et w du point B situé sur l'axe v à une distance égale à l'unité par rapport à l'origine (v. fig. 30 et 31) sont respectivement: $-\rho_w$, 0, ρ_u. Il s'ensuit que l'axe optique du viseur gardera sa position inchangée si les composantes ρ_u et ρ_w de l'angle de rotation totale sont nulles, c'est-à-dire si, conformément aux expressions (1.8.14), sont vérifiées les égalités

$$\begin{aligned}&\Delta\psi\sin\alpha + \Delta\theta\cos\alpha + \Delta\beta = 0,\\ &-(\Delta\psi\cos\alpha - \Delta\theta\sin\alpha)\sin\beta + \Delta\theta\psi\cos\beta + \Delta\alpha\cos\beta = 0.\end{aligned} \qquad (1.8.15)$$

On en tire les formules cherchées pour les variations des coordonnées polaires du point S

$$\begin{aligned}\Delta\beta &= -(\Delta\theta\cos\alpha + \Delta\psi\sin\alpha),\\ \Delta\alpha &= -\Delta\theta\psi + \operatorname{tg}\beta\,(-\Delta\theta\sin\alpha + \Delta\psi\cos\alpha).\end{aligned} \qquad (1.8.16)$$

Elles coïncident avec les expressions (1.7.13) obtenues au § 7, si l'on ne garde dans ces dernières que les termes de premier ordre en ψ.

La deuxième des formules (1.8.14) donne la valeur de la composante ρ_v du vecteur rotation totale du viseur, suivant l'axe optique v. Cette composante détermine le petit angle ρ_v de rotation du réticule du viseur autour de son axe optique v. Lorsque les conditions (1.8.15) sont réalisées, c'est-à-dire l'orientation de l'axe optique du viseur vers l'objet éloigné S demeure inchangée, la quantité $\Delta\alpha$ figurant dans l'expression mentionnée de ρ_v peut être exclue à l'aide de la deuxième formule (1.8.16), si bien que la rotation du viseur autour de son axe optique sera donnée par la formule

$$\rho_v = \frac{1}{\cos\beta}(-\Delta\theta \sin\alpha + \Delta\psi \cos\alpha). \quad (1.8.17)$$

L'étude analytique faite au § 7 n'a pas tenu compte de cette circonstance (rotation du viseur autour de l'axe optique).

BIBLIOGRAPHIE

Благовещенский С. Н. Качка корабля. (*S. Blagovechtchenski.* Roulis et tangage du navire). Л., Судпромгиз, 1954 (en russe).

Ишлинский А. Ю. Геометрия бикарданова подвеса. (*A. Ishlinsky.* Géométrie de la suspension par bicardan). — Приборостроение, 1944, № 1 (en russe).

Ишлинский А. Ю. О взаимном вращении двух стабилизированных площадок при качке корабля. (*A. Ishlinsky.* Sur la rotation relative de deux plates-formes stabilisées au roulis et au tangage du navire). — Приборостроение, 1944, № 2 (en russe).

Ишлинский А. Ю. Геометрия двух бикардановых систем (*A. Ishlinsky.* Géométrie de deux systèmes à bicardan). — Приборостроение, 1944, № 3 (en russe).

Ишлинский А. Ю. Бортовая и килевая качка и изменение курса при качке корабля вокруг произвольно ориентированной оси (*A. Ishlinsky.* Roulis, tangage et variation du cap d'un navire oscillant autour d'un axe arbitrairement orienté). — Приборостроение, 1944, № 4 (en russe).

Ишлинский А. Ю. Ошибки при совместной работе кардановых подвесов разных систем. (*A. Ishlinsky.* Erreurs lors du fonctionnement en commun des suspensions à la cardan des systèmes différents). — Приборостроение, 1945, №№ 1, 2 (en russe).

Ишлинский А. Ю. Механика специальных гироскопических систем (*A. Ishlinsky.* Mécanique des systèmes gyroscopiques spéciaux). Киев, Изд-во АН УССР, 1952 (en russe).

Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса (*A. Ishlinsky.* Sur la théorie du gyrocompas de verticale). — ПММ, 1956, т. 20, вып. 4 (en russe).

Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем (*A. Ishlinsky.* Mécanique des systèmes gyroscopiques). М., Изд-во АН СССР, 1963 (en russe).

Крылов А. Н., Кругков Ю. А. Общая теория гироскопов и некоторых их технических применений (*A. Krylov, You. Kroutkov.* Théorie générale des gyroscopes et de certains instruments gyroscopiques). Л., Изд-во АН СССР, 1932. Voir aussi *Крылов А. Н.* Собр. тр., т. 8 (*A. Krylov.* Œuvres, tome 8). М.-Л., Изд-во АН СССР, 1950 (en russe).

Крылов А. Н. О курсовой и баллистической погрешностях гирокомпаса, снабженного кольцевыми успокоителями, и об их уничтожении (*A. Krylov.*

Erreurs balistique et de cap d'un gyrocompas équipé de stabilisateurs annulaires et leur élimination). M., ГОМЗ, 1938 (en russe).

Крылов А. Н. О теории гирокомпаса Аншютца, изложенной проф. Геккелером (*A. Krylov*. Sur la théorie du gyrocompas Anschütz exposée par le professeur Geckeler). — Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1940, № 4. Voir aussi *Крылов А. Н.* Собр. тр., т. 2, ч. 1 (*A. Krylov*. Œuvres, tome 2, 1re partie). М.-Л., Изд-во АН СССР, 1943 (en russe).

Крылов А. Н. Качка корабля (*A. Krylov*. Roulis et tangage du navire). Л., Воен.-морск. акад. РККФ, 1938. Voir aussi *Крылов А. Н.* Собр. тр., т. 11 (*A. Krylov*. Œuvres, tome 11). М.-Л., Изд-во АН СССР, 1951 (en russe).

Крылов А. Н. Карданов подвес на корабле (*A. Krylov*. Suspension à la cardan à bord des navires). — Собр. тр., т. 12, ч. 1. М-Л., Изд-во АН СССР, 1955 (en russe).

Крылов А. Н. О равновесии и движении тел на качающемся корабле (*A. Krylov*. Sur l'équilibre et le mouvement des corps à bord d'un navire oscillant). Л., 1938. Voir aussi *Крылов А. Н.* Собр. тр., т. 12, ч. 1 (*A. Krylov*. Œuvres, tome 12, 1re partie). М.-Л., Изд-во АН СССР, 1955 (en russe).

Крылов А. Н. Определение на корабле погрешности показаний гирокомпаса (*A. Krylov*. Détermination à bord des navires des erreurs du gyrocompas). — Собр. тр., т. 12, ч. 1. М.-Л., Изд-во АН СССР, 1955 (en russe).

Кудревич Б. И. Избранные труды (*B. Koudrévitch*. Œuvres choisies). М., Изд. Упр. начальника гидрограф. службы ВМФ, 1959 (en russe).

Кудревич Б. И. Краткое изложение принципа жироскопических компасов и описание жироскопического компаса Сперри. (*B. Koudrévitch*. Exposé sommaire du principe des compas gyroscopiques et description du compas gyroscopique de Sperry). — Зап. по гидрогр., 1916, т. 40, вып. 1 (en russe).

Кудревич Б. И. Теория и практика гироскопического компаса (*B. Koudrévitch*. Théorie et pratique du compas gyroscopique). Изд. 2-е., ч. 1-3. Л., Гидрограф. упр., 1929-1932; ч. 4, 5. М.-Л., Упр. воен.-мор. изд-ва, 1945 (en russe).

Кудревич Б. И., Ривкин С. С. Геометрия карданова подвеса. (*B. Koudrévitch, S. Rivkine*. Géométrie de la suspension à la cardan). — Dans le livre: *Кудревич Б. И.* Теория гироскопических приборов (*B. Koudrévitch*. Théorie des appareils gyroscopiques), т. 1. Л., Судпромгиз, 1963 (en russe).

Кудревич Б. И., Ривкин С. С. Преобразование координат на корабле. (*B. Koudrévitch, S. Rivkine*. Changement de coordonnées à bord des navires). — Dans le livre : *Кудревич Б. И.* Теория гироскопических приборов (*B. Koudrévitch*. Théorie des appareils gyroscopiques), т. 1. Л., Судпромгиз, 1963 (en russe).

Кузовков Н. Т. О движении гиростабилизированной платформы, установленной в бикардановом подвесе (*N. Kouzovkov*. Sur le mouvement de la plateforme gyrostabilisée suspendue par bicardan). — Изв. АН СССР. ОТН, 1958, № 7 (en russe).

Одинцов А. А. О влиянии негоризонтальности главной оси гироскопа направления на его карданову ошибку (*A. Odintsov*. Sur l'influence de la non-horizontalité de l'axe principal du gyroscope de cap sur son erreur de cardan). — Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение. 1971, т. 14, № 7 (en russe).

Остромухов Я. Г., Ривкин С. С., Темченко М. Е. Геометрия и кинематика систем гироскопической стабилизации (*Ya. Ostromoukhov, S. Rivkine, M. Temtchenko*. Géométrie et cinématique des systèmes de gyrostabilisation). — Dans le recueil : Развитие механики гироскопических и инерциальных систем (Développement de la mécanique des systèmes gyroscopiques et inertiels). М., « Наука », 1973 (en russe).

Пельпор Д. С. Гироскопические системы, ч. 1. Теория гироскопов и гироскопических стабилизаторов. (*D. Pelpor*. Systèmes gyroscopiques. Ire partie. Théorie des gyroscopes et des stabilisateurs gyroscopiques). М., « Высш. школа », 1971 (en russe).

Ривкин С. С. Теория гироскопических устройств (*S. Rivkine.* Théorie des dispositifs gyroscopiques), ч. 1. Л., Судпромгиз, 1962 ; ч. 2. Л., « Судостроение », 1964 (en russe).
Ройтенберг Я. Н. К теории гироскопического компаса. (*Ya. Reutenberg.* Sur la théorie du compas gyroscopique). — ПММ, 1964, т. 28, вып. 5 (en russe).
Geckeler J. W. Kreiselmechanik des Anschütz — Raumkompasses. — Ingr. — Arch., 1935, Bd. 6, H. 4.
Magnus K. Kreisel. Theorie und Anwendungen. Berlin, e. a., Springer-Verlag, 1971.

CHAPITRE II

ROTATIONS FINIES DU CORPS SOLIDE

§ 1. Etablissement par voie analytique de quelques relations dans la théorie des rotations finies

La théorie des rotations finies du corps solide a une grande importance pour la résolution de certains problèmes relatifs à la détermination de l'orientation des mobiles. Le présent paragraphe est consacré à l'établissement, par la voie purement analytique, sans avoir recours à aucune construction géométrique, des formules pour les cosinus des angles que font entre eux les axes de deux systèmes de coordonnées disposés arbitrairement l'un par rapport à l'autre. Au paragraphe suivant de ce chapitre, nous obtiendrons les mêmes formules par un autre procédé basé sur l'application répétée des tables des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes de coordonnées principaux et auxiliaires. L'exposé qui va suivre est fondé exclusivement sur les théorèmes les plus simples de la géométrie analytique. Certains de ces théorèmes sont utilisés sous forme vectorielle.

Soit un système de coordonnées xyz qui tourne d'un angle quelconque φ autour d'un axe v passant par son origine. Désignons par $x_*y_*z_*$ la position de départ de ce système. Si l, m et n sont les cosinus des angles que l'axe v de rotation finie fait avec les axes du système $x_*y_*z_*$, il est évident que les mêmes quantités sont respectivement les cosinus des angles formés par l'axe v avec les axes du système xyz. En particulier, on a

$$l = \cos \lambda, \tag{2.1.1}$$

où λ est l'angle que l'axe de rotation v fait à la fois avec l'axe x_* du système $x_*y_*z_*$ et avec l'axe x du système xyz (fig. 32).

Désignons les cosinus directeurs de l'axe x par rapport au système $x_*y_*z_*$ respectivement par a, b et c. Proposons-nous de rechercher ces grandeurs, ainsi que les cosinus directeurs des axes y et z rapportés au même système $x_*y_*z_*$. En plus de l'égalité évidente

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \tag{2.1.2}$$

les cosinus directeurs a, b et c de l'axe x satisfont également à la relation

$$la + mb + nc = l \tag{2.1.3}$$

qui exprime, suivant une formule bien connue en géométrie analytique, la valeur du cosinus de l'angle λ que l'axe x fait avec l'axe de rotation v.

Afin de déterminer les trois grandeurs a, b et c, il est nécessaire d'avoir encore une équation. Pour l'établir, on peut mettre à profit le fait que le plan xv est tourné de l'angle φ autour de l'axe v par rapport au plan x_*v. Il s'ensuit que la mesure du dièdre de ces deux plans doit être égale à φ. Le dièdre étant mesuré par l'angle de deux perpendiculaires menées à ses demi-plans, introduisons deux vecteurs $\bar{h}$ et $\bar{k}$ dont le premier est normal au plan x_*v et le second au plan xv (v. fig. 32). Conformément à la propriété du produit scalaire de deux vecteurs nous obtenons

$$hk\cos\varphi = h_{x_*}k_{x_*} + h_{y_*}k_{y_*} + h_{z_*}k_{z_*}, \qquad (2.1.4)$$

où h_{x_*}, h_{y_*}, h_{z_*} sont les projections du vecteur $\bar{h}$ sur les axes x_*, y_*, z_*, et k_{x_*}, k_{y_*}, k_{z_*} les projections du vecteur $\bar{k}$ sur les mêmes axes.

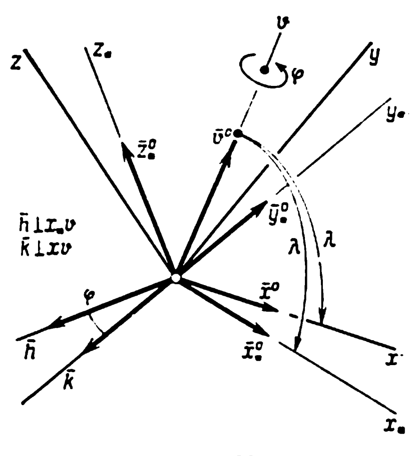


Fig. 32

Représentons le vecteur $\bar{h}$ sous la forme du produit vectoriel du vecteur unitaire $\bar{x}^0_*$ porté par l'axe x_* et du vecteur unitaire $\bar{v}^0$ orienté suivant l'axe de rotation v. Les projections respectives du premier de ces vecteurs sur les axes x_*, y_*, z_* sont évidemment

$$1;\ 0;\ 0, \qquad (2.1.5)$$

et les projections du second sur les mêmes axes sont

$$l;\ m;\ n. \qquad (2.1.6)$$

En appliquant les règles de calcul concernant le produit vectoriel, nous obtenons

$$\bar{h} = \bar{x}^0_* \times \bar{v}^0 = \begin{vmatrix} \bar{x}^0_* & \bar{y}^0_* & \bar{z}^0_* \\ 1 & 0 & 0 \\ l & m & n \end{vmatrix}, \qquad (2.1.7)$$

où $\bar{y}^0_*$ et $\bar{z}^0_*$ sont les vecteurs unitaires portés respectivement par les axes y_* et z_*. Ainsi, nous avons

$$h_{x_*} = 0, \quad h_{y_*} = -n, \quad h_{z_*} = m. \qquad (2.1.8)$$

Représentons de même le vecteur $\bar{k}$ sous la forme du produit vectoriel

$$\bar{k} = \bar{x}^0 \times \bar{v}^0 = \begin{vmatrix} \bar{x}^0_* & \bar{y}^0_* & \bar{z}^0_* \\ a & b & c \\ l & m & n \end{vmatrix}. \qquad (2.1.9)$$

Ici, la deuxième ligne du déterminant est constituée par les projections du vecteur unitaire $\bar{x}^0$ sur les axes x_*, y_*, z_*, qui sont évidemment égales aux cosinus directeurs de l'axe x par rapport au système $x_*y_*z_*$. Le développement du déterminant (2.1.9) conduit aux égalités suivantes:

$$k_{x_*} = nb - mc, \quad k_{y_*} = lc - na, \quad k_{z_*} = ma - lb. \qquad (2.1.10)$$

Les modules des produits vectoriels (2.1.7) et (2.1.9) sont identiques parce qu'égaux au sinus de l'angle λ des axes x_* et v ou, ce qui revient au même, des axes x et v. Ainsi, en utilisant la formule (2.1.1), nous obtenons

$$k = h = \sin \lambda = \sqrt{1 - l^2}. \qquad (2.1.11)$$

En se servant des égalités (2.1.8), (2.1.10) et (2.1.11), on peut mettre la relation (2.1.4) sous la forme

$$(1 - l^2) \cos \varphi = -l\,(mb + nc) + (n^2 + m^2)\,a. \qquad (2.1.12)$$

Cette dernière relation constitue la troisième équation qui, jointe aux équations (2.1.2) et (2.1.3), permet de déterminer les trois cosinus inconnus a, b et c et de définir, par là même, la direction de l'axe x par rapport aux axes du système de coordonnées $x_*y_*z_*$. Suivant l'équation (2.1.3), on a

$$mb + nc = l\,(1 - a). \qquad (2.1.13)$$

Par ailleurs, d'une relation analogue à (2.1.2) il résulte que

$$m^2 + n^2 = 1 - l^2. \qquad (2.1.14)$$

En introduisant les deux dernières égalités dans l'équation (2.1.12), nous obtenons, après réduction des termes semblables, la formule suivante pour l'une des grandeurs cherchées:

$$a = l^2\,(1 - \cos \varphi) + \cos \varphi. \qquad (2.1.15)$$

Pour déterminer b, faisons disparaître les cosinus a et c dans la relation (2.1.2) en utilisant à cet effet les formules (2.1.3) et (2.1.15). Nous obtenons une équation du second degré:

$$[l^2 + (1 - l^2) \cos \varphi]^2 + b^2 + \frac{1}{n^2} \{l - [l^2 + (1 - l^2) \cos \varphi]\, l - bm\}^2 = 1, \qquad (2.1.16)$$

qui se ramène, moyennant quelques simplifications faites à l'aide de la relation (2.1.14), à la forme

$$b^2 - 2blm\,(1 - \cos\varphi) + l^2m^2\,(1 - \cos\varphi)^2 - n^2\sin^2\varphi = 0. \tag{2.1.17}$$

Des deux racines de cette équation:

$$\begin{aligned} b_1 &= lm\,(1 - \cos\varphi) + n\sin\varphi, \\ b_2 &= lm\,(1 - \cos\varphi) - n\sin\varphi \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

il convient de prendre la première. En effet, si l'on pose, en particulier

$$l = m = 0, \quad n = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \tag{2.1.19}$$

on obtient respectivement (fig. 33)

$$b_1 = +1, \quad b_2 = -1. \tag{2.1.20}$$

Pourtant, compte tenu des notations adoptées (fig. 33), on a dans ce cas

$$b = \cos\,(\widehat{x,\ y_*}) = +1, \tag{2.1.21}$$

Fig. 33

et donc la deuxième racine de l'équation (2.1.17) doit être rejetée. Ainsi, dans le cas général,

$$b = lm\,(1 - \cos\varphi) + n\sin\varphi. \tag{2.1.22}$$

En portant maintenant les expressions (2.1.15) et (2.1.22), donnant a et b, dans l'équation (2.1.3) et en tenant compte de l'égalité (2.1.14), nous obtenons la formule suivante pour la détermination de la grandeur c:

$$c = ln\,(1 - \cos\varphi) - m\sin\varphi. \tag{2.1.23}$$

On détermine de même les cosinus des angles que l'axe y fait avec les axes x_*, y_*, z_* et puis les cosinus des angles que l'axe z fait avec les mêmes axes x_*, y_*, z_*. Finalement, la table des cosinus des angles formés par les axes des systèmes de coordonnées xyz et $x_*y_*z_*$ peut être représentée sous la forme suivante:

	x_*	y_*	z_*
x	$(1-\cos\varphi)\,l^2+$ $+\cos\varphi$	$(1-\cos\varphi)\,ml+$ $+n\sin\varphi$	$(1-\cos\varphi)\,nl-$ $-m\sin\varphi$
y	$(1-\cos\varphi)\,lm-$ $-n\sin\varphi$	$(1-\cos\varphi)\,m^2+$ $+\cos\varphi$	$(1-\cos\varphi)\,mn+$ $+l\sin\varphi$
z	$(1-\cos\varphi)\,ln+$ $+m\sin\varphi$	$(1-\cos\varphi)\,mn-$ $-l\sin\varphi$	$(1-\cos\varphi)\,n^2+$ $+\cos\varphi.$

(2.1.24)

Dans cette table, les grandeurs l, m, n, c'est-à-dire les cosinus des angles que l'axe de rotation v fait avec les axes x_*, y_*, z_* (ainsi qu'avec les axes x, y, z), peuvent être remplacées par les expressions suivantes (fig. 34):

$$\begin{aligned} l &= \cos(\widehat{x_*, v}) = \cos\alpha\cos\beta,\\ m &= \cos(\widehat{y_*, v}) = \sin\alpha\cos\beta, \qquad (2.1.25)\\ n &= \cos(\widehat{z_*, v}) = \sin\beta. \end{aligned}$$

Ici, β est l'angle fait par l'axe v avec le plan x_*y_*, et α est l'angle formé par l'axe x_* avec la projection g de l'axe v sur le même plan.

Il en résulte la représentation des éléments de la table (2.1.24) par l'intermédiaire de trois angles α, β et φ [1]).

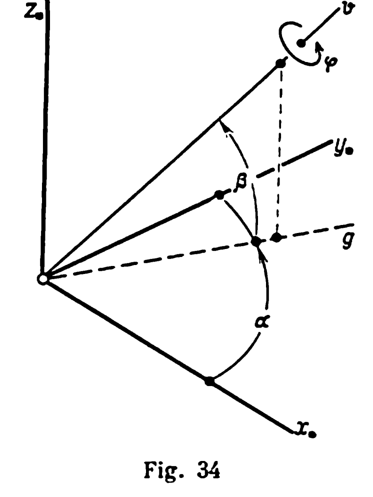


Fig. 34

Exposons maintenant la résolution d'un problème inverse de celui qui a été posé au début de ce paragraphe, à savoir: connaissant la table des cosinus des angles que font entre eux les axes de deux systèmes de coordonnées ayant une origine commune, déterminer tant les cosinus directeurs de l'axe que l'angle d'une rotation finie qui amène l'un des systèmes en coïncidence avec l'autre.

Soit un système de coordonnées xyz obtenu par suite d'une rotation d'angle φ autour d'une droite v à partir de la position $x_*y_*z_*$. Désignons les cosinus directeurs de cette droite par rapport au système $x_*y_*z_*$ (ainsi que par rapport au système xyz) comme précédemment par l, m et n. Reportons-nous maintenant à la table (2.1.24) des cosinus des angles

[1]) La même représentation de ces éléments est obtenue par un autre procédé au § 3 du présent chapitre.

que forment entre eux les axes des systèmes de coordonnées xyz et $x_*y_*z_*$.

En additionnant les éléments diagonaux et en tenant compte de l'identité (2.1.14), nous obtenons l'expression $1 + 2\cos\varphi$ qui permet dans l'intervalle $]0, \pi[$ de déterminer de façon unique l'angle de rotation φ. Prenons la différence de deux éléments symétriques par rapport à la diagonale de la même table, situés dans son coin supérieur gauche. Nous obtenons $2n \sin\varphi$, ce qui permet de trouver le cosinus n de l'angle que la droite v fait avec l'axe z_* (ou, ce qui revient au même, de l'angle formé par la droite v et l'axe z). D'autres différences analogues permettent de déterminer les autres cosinus directeurs, c'est-à-dire l et m.

Ainsi, dans le cas où la table des cosinus des angles formés par les axes des systèmes de coordonnées xyz et $x_*y_*z_*$ est connue et se présente sous la forme

$$\begin{array}{cccc} & x_* & y_* & z_* \\ x & s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ y & s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ z & s_{31} & s_{32} & s_{33}, \end{array} \qquad (2.1.26)$$

on a

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(s_{11} + s_{22} + s_{33}) - \frac{1}{2} \qquad (2.1.27)$$

et

$$l = \frac{s_{23} - s_{32}}{2\sin\varphi}, \quad m = \frac{s_{31} - s_{13}}{2\sin\varphi}, \quad n = \frac{s_{12} - s_{21}}{2\sin\varphi}. \qquad (2.1.28)$$

Ces formules permettent de déterminer l'angle φ d'une rotation finie du système xyz de sa position $x_*y_*z_*$ dans sa nouvelle position, ainsi que les cosinus directeurs l, m et n de l'axe d'une telle rotation.

Il est essentiel de noter qu'en plus de l'angle φ situé dans l'intervalle $]0, \pi[$, on peut également indiquer un angle φ' contenu dans l'intervalle $]-\pi, 0[$ et tel que $1 + 2\cos\varphi' = 1 + 2\cos\varphi$. Il est évident que les angles φ et φ' ne diffèrent l'un de l'autre que par le signe. Par ailleurs, si l'on calcule les cosinus directeurs l', m', n' de l'axe de rotation finie, correspondant à l'angle φ', on trouve qu'ils sont de signe contraire par rapport à l, m, n. Pourtant, il en résulte que la rotation du solide de l'angle $\varphi' = -\varphi$ autour de la demi-droite de cosinus directeurs l', m', n' est identique à celle de l'angle φ autour de la demi-droite initiale (dont l'orientation est déterminée par les cosinus l, m, n).

Les angles du type $\varphi + 2k\pi$ et $\varphi' + 2k'\pi$, où k et k' sont des entiers quelconques, constituent certes, eux aussi, des solutions du problème de la détermination de la rotation finie correspondant à la table (2.1.24). Il est pourtant évident qu'elles ne conduisent qu'à

des rotations supplémentaires, composées d'un nombre entier de tours complets du solide autour du même axe qui font revenir chaque fois le solide dans la même position finale.

Notons pour conclure que, compte tenu de l'égalité (2.1.14), les formules (2.1.27) et (2.1.28) permettent d'obtenir, après élimination de l'angle φ, une identité intéressante

$$(s_{23} - s_{32})^2 + (s_{31} - s_{13})^2 + (s_{12} - s_{21})^2 + \\ + (s_{11} + s_{22} + s_{33} - 1)^2 = 4. \quad (2.1.29)$$

Cette dernière contient sous forme symétrique tous les éléments de la table des cosinus des angles que forment entre eux les axes de deux systèmes de coordonnées rectangulaires quelconques.

§ 2. Variation de la bande, de l'assiette et du cap en cas d'une rotation finie du navire autour d'un axe quelconque

Les essais des dispositifs gyroscopiques en laboratoire peuvent être effectués en faisant tourner le boîtier, qui les renferme, d'angles finis autour d'un certain axe incliné. Si les gyroscopes sont utilisés pour stabiliser un anneau de cardan intérieur dans le plan horizontal et pour conserver dans ce plan une certaine direction, en particulier celle vers le Nord, on obtiendra, à chaque rotation finie, la bande θ et l'assiette ψ de la base du dispositif, ainsi que l'angle $\varkappa$ que fait la direction stabilisée avec la ligne de foi (v. chap. I, § 1). Ceci étant, les deux premières grandeurs seront enregistrées sur les échelles des cardans, et la troisième, sur l'anneau intérieur.

Admettons que dans la position initiale du boîtier de la suspension à la cardan les angles θ et ψ sont nuls et que l'angle $\varkappa$ a une valeur $\varkappa_0$. Dans ce qui suit, nous nous proposons de déterminer les valeurs des angles θ et ψ, ainsi que la différence χ entre $\varkappa$ et $\varkappa_0$ si est donnée la rotation finie du boîtier de la suspension à la cardan à partir de sa position initiale, autour d'un axe dont la position par rapport au boîtier est également donnée. Le même problème se pose lorsqu'on veut calculer les variations de la bande, de l'assiette et du cap du navire par suite de son déplacement angulaire d'une position dans une autre. En effet, d'après un théorème bien connu en cinématique, chacun de tels déplacements peut être réalisé par une seule rotation finie du navire autour d'un axe convenablement choisi. D'autre part, lorsque la position du navire est connue, l'ensemble des grandeurs : bande, assiette et cap, détermine de façon unique son orientation dans l'espace.

Ainsi, soit un système de coordonnées xyz (les désignations sont choisies conformément aux notations adoptées au § 1) lié au boîtier de la suspension à la cardan de telle sorte que son axe y est dirigé suivant l'axe de l'anneau de cardan extérieur. Nous admettrons que

dans la position initiale ($\theta = \psi = 0$) les plans des deux anneaux sont confondus avec le plan xy.

Désignons par la lettre v (v. fig. 35) l'axe autour duquel peut tourner le boîtier de la suspension à la cardan avec le système de coordonnées xyz. Soit $x_*y_*z_*$ la position initiale de ce système pour laquelle le plan x_*y_* est horizontal. De même que dans le paragraphe précédent, l'angle formé par l'axe v avec le plan x_*y_* sera désigné

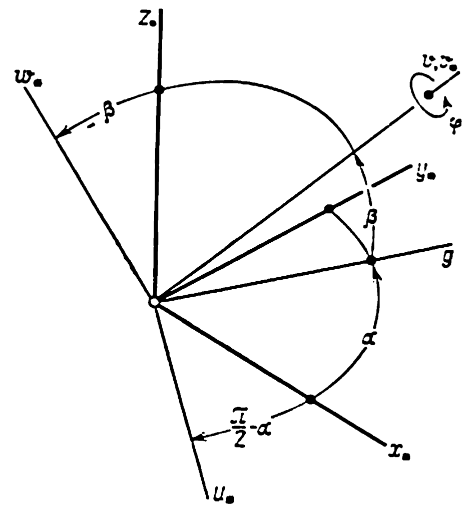


Fig. 35

par la lettre β et l'angle formé par l'axe x_* avec la projection g de l'axe v sur ce plan par la lettre α. Considérons par ailleurs un système de coordonnées auxiliaire $u_*v_*w_*$ (fig. 35) dont l'axe v_* est confondu avec l'axe v autour duquel peut tourner le boîtier de la suspension à la cardan ; l'axe u_* est situé dans le plan x_*y_* et est perpendiculaire à la droite g en faisant ainsi l'angle $\pi/2 - \alpha$ avec l'axe x_* ; l'axe w_* est perpendiculaire aux axes u_* et v_* en formant ainsi avec eux un repère direct. Il est évident que l'angle des axes w_* et z_* est, lui aussi, égal à β.

La table des cosinus des angles formés par les axes des systèmes de coordonnées $u_*v_*w_*$ et $x_*y_*z_*$ n'est pas difficile à construire si l'on calcule, par exemple, les projections sur les axes x_*, y_*, z_* des segments unitaires situés sur les axes u_*, v_*, w_* (v. fig. 35). Elle est de la forme

	x_*	y_*	z_*	
u^*	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	0	
v_*	$\cos\alpha\cos\beta$	$\sin\alpha\cos\beta$	$\sin\alpha$	(2.2.1)
w_*	$-\cos\alpha\sin\beta$	$-\sin\alpha\sin\beta$	$\cos\beta$.	

D'après les hypothèses du problème, avant que la rotation du boîtier de la suspension s'effectue autour de l'axe v (v_*), les axes du système xyz lié au boîtier étaient respectivement confondus avec ceux du système $x_*y_*z_*$ et donc le plan xy était horizontal. Introduisons un système de coordonnées uvw associé, de même que le système xyz, au boîtier de la suspension à la cardan, et admettons qu'avant la rotation du boîtier les axes u, v, w coïncident respectivement avec u_*, v_*, w_*. Il est évident que la table des cosinus des angles formés par les axes des systèmes de coordonnées uvw et xyz a exactement la même forme que la table (2.2.1) des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes $u_*v_*w_*$ et $x_*y_*z_*$, c'est-à-dire

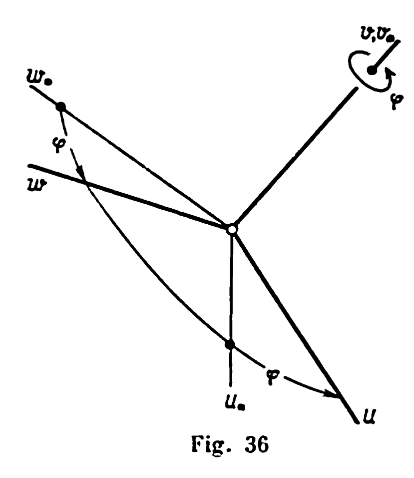


Fig. 36

	x	y	z
u	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	0
v	$\cos\alpha\cos\beta$	$\sin\alpha\cos\beta$	$\sin\beta$
w	$-\cos\alpha\sin\beta$	$-\sin\alpha\sin\beta$	$\cos\beta$.

(2.2.2)

Après la rotation du boîtier de la suspension de l'angle φ autour de l'axe v (fig. 36), qui est constamment confondu avec l'axe v_*, les cosinus des angles formés par les axes des systèmes uvw et $u_*v_*w_*$ constituent la table suivante:

	u_*	v_*	w_*
u	$\cos\varphi$	0	$-\sin\varphi$
v	0	1	0
w	$\sin\varphi$	0	$\cos\varphi$.

(2.2.3)

En se servant des tables (2.2.1) et (2.2.3), on peut construire la table des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes de coordonnées uvw et $x_*y_*z_*$. En particulier, on a, par exemple

$$\cos(\widehat{x_*, u}) = \cos(\widehat{x_*, u_*})\cos(\widehat{u_*, u}) + \cos(\widehat{x_*, v_*})\cos(\widehat{v_*, u}) +$$
$$+ \cos(\widehat{x_*, w_*})\cos(\widehat{w_*, u}) = \sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\beta\sin\varphi. \quad (2.2.4)$$

La table cherchée est de la forme

	x_*	y_*	z_*
u	$\cos\alpha\sin\beta\sin\varphi + \sin\alpha\cos\varphi$	$\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi - \cos\alpha\cos\varphi$	$-\cos\beta\sin\varphi$
v	$\cos\alpha\cos\beta$	$\sin\alpha\cos\beta$	$\sin\beta$
w	$-\cos\alpha\sin\beta\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi$	$-\sin\alpha\sin\beta\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi$	$\cos\beta\cos\varphi$.

(2.2.5)

Les tables (2.2.2) et (2.2.5) déterminent les cosinus des angles formés par les axes des systèmes xyz et $x_*y_*z_*$ avec les axes du même système uvw. Ceci permet de construire la table suivante des cosinus des angles que forment les axes des systèmes xyz et $x_*y_*z_*$:

	x_*	y_*	z_*
x	$\mu\cos^2\alpha\cos\beta + \cos\varphi$	$\mu\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\sin\varphi$	$-\sin\alpha\cos\beta\sin\varphi + \mu\cos\alpha\sin\beta$
y	$\mu\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\varphi$	$\mu\sin^2\alpha\cos\beta + \cos\varphi$	$\cos\alpha\cos\beta\sin\varphi + \mu\sin\alpha\sin\beta$
z	$\sin\alpha\cos\beta\sin\varphi + \mu\cos\alpha\sin\beta$	$-\cos\alpha\cos\beta\sin\varphi + \mu\sin\alpha\sin\beta$	$1 - \mu\cos\beta$,

(2.2.6)

où

$$\mu = (1 - \cos\varphi)\cos\beta. \tag{2.2.7}$$

La table (2.2.6) contient les cosinus des angles que font entre eux les axes de deux systèmes de coordonnées dont l'un est obtenu à partir de l'autre par suite d'une rotation finie d'angle φ autour de l'axe passant par leur origine. Le procédé, ici proposé, pour obtenir une telle table est un des plus simples. Au cours du paragraphe précédent, la même table a été obtenue de façon purement analytique.

Par hypothèse, l'anneau intérieur de la suspension à la cardan est stabilisé dans le plan horizontal. Il s'ensuit que l'axe ζ perpendiculaire au plan de l'anneau intérieur coïncide avec l'axe z_* perpendiculaire au plan horizontal et que les cosinus des angles qu'ils font avec les axes x, y et z sont respectivement égaux.

La table des cosinus des angles formés par les axes du système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ (lié à l'anneau de cardan intérieur) avec ceux du système xyz a la même forme que la table (1.1.4), à savoir

	x	y	z
ξ	$\cos\theta$	0	$\sin\theta$
η	$-\sin\theta\sin\psi$	$\cos\psi$	$\cos\theta\sin\psi$
ζ	$-\sin\theta\cos\psi$	$-\sin\psi$	$\cos\theta\cos\psi$.

(2.2.8)

Utilisons maintenant les tables (2.2.8) et (2.2.6) pour comparer les cosinus des angles faits respectivement par les axes ζ et z_* avec les axes x, y et z. Compte tenu de (2.2.7), on obtient finalement trois relations

$$\begin{aligned} -\sin\theta\cos\psi &= (1-\cos\varphi)\cos\alpha\cos\beta\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\sin\varphi,\\ -\sin\psi &= (1-\cos\varphi)\sin\alpha\cos\beta\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\sin\varphi,\\ \cos\theta\cos\psi &= (1-\cos\varphi)\sin^2\beta+\cos\varphi, \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

dont chacune est une conséquence de deux autres.

Etant donné les valeurs des angles α, β et φ, les relations (2.2.9) permettent de calculer les angles θ et ψ de rotation de l'anneau extérieur par rapport au boîtier et de l'anneau intérieur par rapport à l'anneau extérieur. Si les angles β et φ sont supposés petits et l'angle d'azimut α est arbitraire, les deux premières relations (2.2.9) entraînent, à des termes de deuxième ordre en β et φ près,

$$\begin{aligned} \theta &= \varphi\sin\alpha,\\ \psi &= -\varphi\cos\alpha. \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

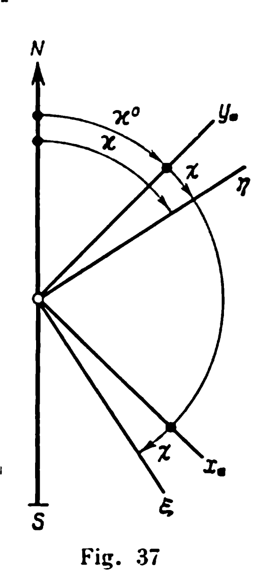


Fig. 37

Ces formules peuvent être rendues plus exactes si l'on développe les seconds membres des relations (2.2.9) suivant les puissances de β et φ et qu'on y garde tous les termes jusqu'au troisième ordre inclus. Ceci étant, les termes d'ordre supérieur par rapport à θ et ψ figurant dans les développements analogues des premiers membres des relations (2.2.9) suivant les puissances de ces variables doivent être remplacés par les expressions (2.2.10). En définitive, on obtient les formules suivantes

$$\begin{aligned} \theta &= \varphi\sin\alpha-\frac{1}{2}\beta\varphi^2\cos\alpha-\frac{1}{2}\beta^2\varphi\sin\alpha+\frac{1}{3}\varphi^3\cos^2\alpha\sin\alpha,\\ \psi &= -\varphi\cos\alpha-\frac{1}{2}\beta\varphi^2\sin\alpha+\frac{1}{2}\beta^2\varphi\cos\alpha+\frac{1}{6}\varphi^3\cos\alpha\sin^2\alpha. \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Lorsque l'angle φ est nul, les axes des systèmes de coordonnées $\xi\eta\zeta$, xyz et $x_*y_*z_*$ sont respectivement confondus. S'il est différent de zéro, le système $\xi\eta\zeta$ lié à l'anneau de cardan intérieur se trouve tourné autour de l'axe ζ par rapport au système fixe $x_*y_*z_*$ d'un angle χ (fig. 37) égal, comme il a déjà été indiqué, à la différence des angles $\varkappa$ et $\varkappa_0$. En se servant des tables (2.2.8) et (2.2.6), ainsi

que de la formule (2.2.7), on trouve

$$\cos(\widehat{\xi,\ y_*}) = -\sin\chi = \cos(\widehat{\xi,\ x})\cos(\widehat{x,\ y_*}) + \\ + \cos(\widehat{\xi,\ y})\cos(\widehat{y,\ y_*}) + \cos(\widehat{\xi,\ z})\cos(\widehat{z,\ y_*}) = \\ = \cos\theta\,[(1-\cos\varphi)\cos\alpha\sin\alpha\cos^2\beta + \sin\beta\sin\varphi] + \\ + \sin\theta\,[(1-\cos\varphi)\sin\alpha\cos\beta\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta\sin\varphi]. \quad (2.2.12)$$

Ainsi, la relation (2.2.12) donne l'angle χ dont tourne autour de l'axe ζ l'anneau intérieur à partir de sa position initiale lorsque le boîtier de la suspension effectue une rotation finie d'angle φ autour de l'axe v. Pour $\chi > 0$, l'anneau intérieur se trouve tourné par rapport à sa position de départ (lorsque $\chi = 0$) dans le sens des aiguilles d'une montre si la rotation est observée d'en haut. Ceci signifie que l'angle $\varkappa$ formé par l'axe η avec la direction stabilisée dans le plan horizontal augmente, dans ce cas, de l'angle χ (v. fig. 37) par rapport à la valeur $\varkappa_0$ qu'il avait pour $\varphi = 0$.

Si, en calculant la valeur de l'angle χ, on se limite aux termes de deuxième ordre en β, θ et φ, on tire de la relation (2.2.12)

$$\chi = -\beta\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2\cos\alpha\sin\alpha + \theta\varphi\cos\alpha. \quad (2.2.13)$$

En y introduisant l'expression de θ suivant (2.2.10), on obtient en définitive la formule suivante:

$$\chi = -\beta\varphi + \frac{1}{2}\varphi^2\cos\alpha\sin\alpha. \quad (2.2.14)$$

Une expression plus exacte pour la valeur de l'angle χ peut être obtenue comme précédemment, si l'on garde dans les développements des deux membres de la relation (2.2.12) des termes en β, φ et χ d'ordre plus élevé.

A noter que suivant la formule (2.2.14) les rotations de l'anneau de cardan intérieur dans le plan horizontal à partir de sa position initiale (lorsque $\varphi = 0$) sont différentes suivant que le boîtier de la suspension tourne autour de l'axe v d'un même angle φ mais dans des sens différents.

Exemple numérique.— Soit une suspension à la cardan dont le boîtier est animé des oscillations d'amplitude $\varphi_a = 0{,}300$ (17°11,3′) autour d'un axe v qui fait avec le plan horizontal l'angle $\beta = 0{,}200$ (11°27,5′), la projection de cet axe sur le plan xy divisant l'angle des axes x et y en deux parties égales, soit $\alpha = 45°$. Les calculs à l'aide des formules approchées (2.2.10) et (2.2.14) donnent pour $\varphi = +0{,}300$: $\theta = 0{,}2121$ (12°9,3′), $\psi = -0{,}2121$ (−12°9,3′), $\chi = -0{,}03750$ (−2°8,9′). Si $\varphi = -0{,}300$, on a $\theta = -0{,}2121$ (−12°9,3′), $\psi = +0{,}2121$ (12°9,3′), $\chi = +0{,}08250$ (4°43,5′). Remarquons qu'en calculant les angles θ, ψ et χ à partir des relations fondamentales (2.2.9) et (2.2.12) on obtient pour $\varphi = +0{,}300$: $\theta = 0{,}2046$ (11°43,5′), $\psi = -0{,}2125$ (−12°10,7′),

$\chi = -0{,}03812$ $(-2°11{,}1')$ et pour $\varphi = -0{,}300$: $\theta = -0{,}2169$ $(-12°25{,}8')$, $\psi = 0{,}2000$ $(11°27{,}5')$, $\chi = 0{,}08188$ $(4°41{,}5')$. Ainsi, la précision des calculs au moyen des formules approchées (2.2.10) et (2.2.14) s'avère satisfaisante jusqu'au deuxième chiffre après la virgule pour les valeurs de θ et ψ et même jusqu'au troisième chiffre pour la valeur de χ. Elle s'améliore au troisième chiffre si les valeurs de θ et ψ sont calculées à l'aide des formules plus exactes (2.2.11). En effet, on a ici pour $\varphi = +0{,}300$: $\theta = 0{,}2047$ $(11°43{,}7')$, $\psi = -0{,}2127$ $(-12°11{,}1')$, alors que pour $\varphi = -0{,}300$: $\theta = -0{,}2174$ $(-12°27{,}5')$ et $\psi = 0{,}1999$ $(11°27{,}3')$.

En dérivant les expressions (2.2.10) pour θ et ψ et (2.2.14) pour χ par rapport au temps, il n'est pas difficile d'obtenir les expressions correspondantes pour les vitesses angulaires de rotation de l'anneau extérieur par rapport au boîtier de la suspension, de l'anneau intérieur par rapport à l'anneau extérieur et enfin la vitesse angulaire de rotation de l'anneau intérieur dans le plan horizontal par rapport au système de coordonnées fixe $x_*y_*z_*$. Si, en particulier, l'on pose dans les formules (2.2.10) et (2.2.14)

$$\varphi = \varphi_a \sin \omega t, \tag{2.2.15}$$

on obtient pour les angles θ, ψ et χ les expressions suivantes:

$$\begin{aligned}
\theta &= \varphi_a \sin\alpha \sin\omega t,\\
\psi &= -\varphi_a \cos\alpha \sin\omega t, \qquad\qquad (2.2.16)\\
\chi &= -\beta\varphi_a \sin\omega t + \frac{1}{2}\varphi_a^2 \sin\alpha\cos\alpha\sin^2\omega t =\\
&= \frac{1}{8}\varphi_a^2\sin 2\alpha - \beta\varphi_a\sin\omega t - \frac{1}{8}\varphi_a^2\sin 2\alpha\cos 2\omega t,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= \omega\varphi_a \sin\alpha\cos\omega t,\\
\frac{d\psi}{dt} &= -\omega\varphi_a\cos\alpha\cos\omega t, \qquad\qquad (2.2.17)\\
\frac{d\chi}{dt} &= -\omega\beta\varphi_a\cos\omega t + \frac{1}{4}\omega\varphi_a^2\sin 2\alpha\sin 2\omega t.
\end{aligned}$$

Le mouvement de l'anneau intérieur (stabilisé dans le plan horizontal) est constitué, dans ce cas, par des oscillations harmoniques superposées qui se produisent autour de l'axe vertical ζ avec des pulsations ω et 2ω.

§ 3. Paramètres de Rodrigues-Hamilton et quaternions

Dans la théorie des rotations finies, un certain rôle est joué par des paramètres dits de Rodrigues-Hamilton que l'on introduit de la façon suivante. A chaque rotation du corps solide d'un angle φ au-

tour d'un axe v de cosinus directeurs l, m et n rapportés à un système de coordonnées initial donné $x_* y_* z_*$, on fait correspondre quatre nombres

$$p_0 = \cos\frac{\varphi}{2}, \qquad p_1 = l \sin\frac{\varphi}{2}, \qquad p_2 = m \sin\frac{\varphi}{2}, \qquad p_3 = n \sin\frac{\varphi}{2} \tag{2.3.1}$$

liés entre eux par la relation évidente

$$p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. \tag{2.3.2}$$

C'est à ces nombres que l'on donne le nom de *paramètres de Rodrigues-Hamilton.*

Revenons à la table (2.1.24) qui a été obtenue au § 1 du présent chapitre. Elle contient les cosinus des angles formés par les axes de deux systèmes de coordonnées $x_* y_* z_*$ et xyz (dont le deuxième s'obtient à partir du premier par suite de la rotation d'angle φ autour du même axe v). Compte tenu des formules (2.3.1), cette table peut être mise sous la forme

	x_*	y_*	z_*
x	$2p_0^2+2p_1^2-1$	$2p_1p_2+2p_0p_3$	$2p_1p_3-2p_0p_2$
y	$2p_1p_2-2p_0p_3$	$2p_0^2+2p_2^2-1$	$2p_2p_3+2p_0p_1$
z	$2p_1p_3+2p_0p_2$	$2p_2p_3-2p_0p_1$	$2p_0^2+2p_3^2-1.$

(2.3.3)

En effet, pour revenir à la table (2.1.24) il suffit de remplacer ici p_0, p_1, p_2, p_3 par leurs représentations (2.3.1) et d'utiliser les formules simples de duplication.

Supposons maintenant que le système xyz a tourné d'un angle φ' autour d'un axe v' et a pris la position $x'y'z'$. Désignons par l', m', n' les cosinus des angles faits par l'axe v' avec les axes x, y, z. Introduisons des paramètres

$$q_0 = \cos\frac{\varphi'}{2}, \qquad q_1 = l' \sin\frac{\varphi'}{2}, \qquad q_2 = m' \sin\frac{\varphi'}{2}, \qquad q_3 = n' \sin\frac{\varphi'}{2} \tag{2.3.4}$$

correspondant à la deuxième rotation. D'après ce qui vient d'être dit, les éléments de la table

	x	y	z
x'	$2q_0^2 + 2q_1^2 - 1$	$2q_1q_2 + 2q_0q_3$	$2q_1q_3 - 2q_0q_2$
y'	$2q_1q_2 - 2q_0q_3$	$2q_0^2 + 2q_2^2 - 1$	$2q_2q_3 + 2q_0q_1$
z'	$2q_1q_3 + 2q_0q_2$	$2q_2q_3 - 2q_0q_1$	$2q_0^2 + 2q_3^2 - 1$

(2.3.5)

représentent les cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes de coordonnées $x'y'z'$ et xyz. Le premier de ces systèmes est obtenu à partir du deuxième par suite de la rotation finie caractérisée par les paramètres (2.3.4). Par analogie avec l'identité (2.3.2), on a, bien entendu,

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1. \tag{2.3.6}$$

Il est évident que le système $x'y'z'$ peut également être obtenu par une rotation finie du système $x_*y_*z_*$ d'un angle approprié σ autour d'un certain axe d. La détermination géométrique de la valeur de σ et de la direction de d est donnée par le théorème connu de Chasles [1]). Pour résoudre ce problème de façon analytique, introduisons les paramètres

$$\begin{aligned} r_0 &= \cos\frac{\sigma}{2}, & r_1 &= a\sin\frac{\sigma}{2}, \\ r_2 &= b\sin\frac{\sigma}{2}, & r_3 &= c\sin\frac{\sigma}{2}, \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

où a, b, c sont les cosinus directeurs de l'axe d par rapport au système $x_*y_*z_*$ (ou, ce qui revient au même, par rapport au système $x'y'z'$). La recherche de l'angle σ et de la direction de l'axe d se ramène ainsi au calcul des paramètres r_0, r_1, r_2, r_3 d'après les ensembles connus des paramètres p_0, p_1, p_2, p_3 et q_0, q_1, q_2, q_3 qui caractérisent respectivement les rotations de la position $x_*y_*z_*$ dans la position xyz et de cette dernière dans la position $x'y'z'$.

Par analogie avec la table (2.3.3), on peut construire la table suivante des cosinus des angles formés par les axes des systèmes $x_*y_*z_*$ et $x'y'z'$, dont les éléments sont exprimés par les paramètres r_0, r_1, r_2, r_3, à savoir:

$$\begin{array}{cccc} & x_* & y_* & z_* \\ x' & 2r_0^2 + 2r_1^2 - 1 & 2r_1r_2 + 2r_0r_3 & 2r_1r_3 - 2r_0r_2 \\ y' & 2r_1r_2 - 2r_0r_3 & 2r_0^2 + 2r_2^2 - 1 & 2r_2r_3 + 2r_0r_1 \\ z' & 2r_1r_3 + 2r_0r_2 & 2r_2r_3 - 2r_0r_1 & 2r_0^2 + 2r_3^2 - 1. \end{array} \tag{2.3.8}$$

Pourtant, les éléments de cette table peuvent également s'exprimer en fonction des paramètres p_0, p_1, p_2, p_3 et q_0, q_1, q_2, q_3. A cet effet, il suffit d'appliquer la méthode exposée au § 1 du chapitre précédent, permettant de construire la table des cosinus des angles que font entre eux les axes de deux systèmes de coordonnées, à partir de deux autres tables connues des cosinus des angles. Ces dernières contiennent respectivement les cosinus des angles que les axes de chacun des systèmes donnés font avec les axes d'un système auxiliaire quelconque. Dans le cas considéré, le système auxiliaire est

[1]) Voir chap. III, § 6 du présent livre.

constitué par le système de coordonnées xyz. On a, en particulier,

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{x', x_*}) &= \cos(\widehat{x', x})\cos(\widehat{x, x_*}) + \\ &+ \cos(\widehat{x', y})\cos(\widehat{y, x_*}) + \cos(\widehat{x', z})\cos(\widehat{z, x_*}), \\ \cos(\widehat{x', y_*}) &= \cos(\widehat{x', x})\cos(\widehat{x, y_*}) + \\ &+ \cos(\widehat{x', y})\cos(\widehat{y, y_*}) + \cos(\widehat{x', z})\cos(\widehat{z, y_*}),\end{aligned} \quad (2.3.9)$$

etc. En y introduisant les données des tables (2.3.3), (2.3.5) et (2.3.8), on obtient les équations suivantes:

$$\begin{aligned}2r_0^2 + 2r_1^2 - 1 &= (2q_0^2 + 2q_1^2 - 1)(2p_0^2 + 2p_1^2 - 1) + \\ &+ (2q_1q_2 + 2q_0q_3)(2p_1p_2 - 2p_0p_3) + (2q_1q_3 - \\ &- 2q_0q_2)(2p_1p_3 + 2p_0p_2), \\ 2r_1r_2 + 2r_0r_3 &= (2q_0^2 + 2q_1^2 - 1)(2p_1p_2 + 2p_0p_3) + \\ &+ (2q_1q_2 + 2q_0q_3)(2p_0^2 + 2p_2^2 - 1) + (2q_1q_3 - \\ &- 2q_0q_2)(2p_2p_3 - 2p_0p_1),\end{aligned} \quad (2.3.10)$$

etc. Le nombre total de ces équations est égal à neuf. Elles contiennent quatre inconnues r_0, r_1, r_2, r_3 qui satisfont, de plus, à la relation

$$r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1. \quad (2.3.11)$$

On peut vérifier directement que les équations (2.3.10) et la relation (2.3.11) se transforment en identités si l'on y pose

$$\begin{aligned}r_0 &= p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3, \\ r_1 &= p_1q_0 + p_0q_1 - p_3q_2 + p_2q_3, \\ r_2 &= p_2q_0 + p_3q_1 + p_0q_2 - p_1q_3, \\ r_3 &= p_3q_0 - p_2q_1 + p_1q_2 + p_0q_3.\end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Les formules (2.3.12) jointes aux expressions (2.3.7) permettent de déterminer l'angle σ et la direction de l'axe d d'une rotation finie qui transforme directement $x_*y_*z_*$ en $x'y'z'$, sans utiliser le système auxiliaire xyz. La structure de ces formules sera expliquée un peu plus loin.

Traitons d'un exemple. Supposons que le système de coordonnées $x_*y_*z_*$ a tourné autour de l'axe x_* d'un angle $\varphi = \pi/2$ en sens inverse des aiguilles d'une montre (si la rotation est observée du côté de la partie positive de cet axe) et a pris la position xyz (fig. 38). Dans ce cas, $l = 1$, $m = 0$, $n = 0$. Suivant les formules (2.3.1), à une telle rotation finie correspond l'ensemble suivant des paramètres de Rodrigues-Hamilton: $p_0 = \sqrt{2}/2$, $p_1 = \sqrt{2}/2$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$.

Faisons tourner le système xyz autour de l'axe y de l'angle $\pi/2$ (toujours en sens inverse des aiguilles d'une montre) en le mettant dans la position $x'y'z'$ (fig. 39). On a maintenant $\varphi' = \pi/2$, $l' = 0$, $m' = 1$, $n' = 0$. Conformément aux formules (2.3.4), cette rotation est caractérisée par les paramètres $q_0 = \sqrt{2}/2$, $q_1 = 0$, $q_2 = \sqrt{2}/2$, $q_3 = 0$.

En se servant des égalités (2.3.12), on obtient les paramètres

$$r_0 = 1/2, \quad r_1 = 1/2, \quad r_2 = 1/2, \quad r_3 = 1/2$$

qui correspondent à la rotation finie qui fait passer le système $x_* y_* z_*$ directement dans la position $x'y'z'$ (fig. 40). Suivant la première formule (2.3.7) et la

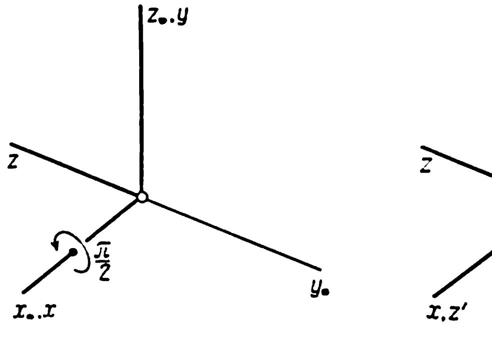


Fig. 38

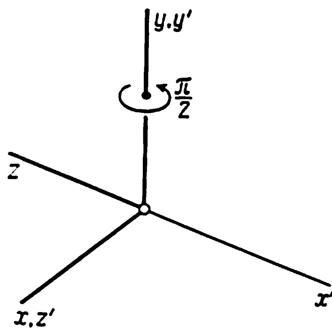


Fig. 39

valeur du paramètre r_0 que nous venons de trouver, l'angle σ de cette rotation finie est égal à 120°. Les cosinus a, b, c des angles faits par l'axe d avec les axes x_*, y_* et z_* sont identiques et égaux à $1/\sqrt{3}$ (on les calcule d'après les formules (2.3.7) et les valeurs numériques des paramètres r_1, r_2, r_3). Ainsi, les axes du système de coordonnées $x'y'z'$ doivent coïncider avec les axes correspondants du système $x_* y_* z_*$ lorsque ce dernier a tourné de 120° autour d'une droite également inclinée sur ses axes x_*, y_* et z_*. Il est aisé de s'assurer (v. fig. 40) qu'il en est ainsi.

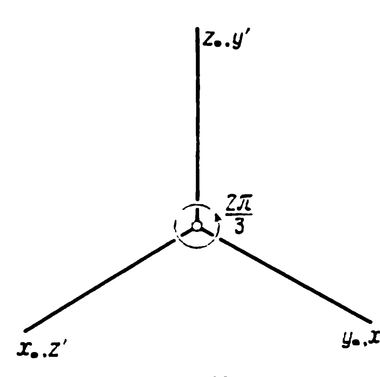


Fig. 40

Les calculs liés à la recherche des paramètres de Rodrigues-Hamilton peuvent être systématisés dans une certaine mesure si l'on a recours à des *quaternions*, c'est-à-dire des nombres hypercomplexes de la forme

$$p = p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3 \qquad (2.3.13)$$

qui comportent une unité réelle et trois unités imaginaires i, j et k. Ici, p_0, p_1, p_2 et p_3 sont les paramètres de Rodrigues-Hamilton définis comme précédemment par les formules (2.3.1). Par définition, la multiplication des unités imaginaires obéit aux règles suivantes:

$$\begin{aligned} &i^2 = j^2 = k^2 = -1; \\ &jk = i, \quad kj = -i; \\ &ki = j, \quad ik = -j; \\ &ij = k, \quad ji = -k. \end{aligned} \qquad (2.3.14)$$

Il s'ensuit que le produit de deux quaternions p et q dont le premier est défini par la formule (2.3.13) et le deuxième est de la forme

$$q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3, \qquad (2.3.15)$$

est encore un quaternion. Introduisons pour ce dernier la désignation

$$r = r_0 + ir_1 + jr_2 + kr_3. \qquad (2.3.16)$$

En tenant compte des formules (2.3.14), on obtient immédiatement des égalités qui reproduisent exactement les formules (2.3.12) pour les paramètres de Rodrigues-Hamilton correspondant au résultat de deux rotations finies successives dont la première est caractérisée par l'ensemble des paramètres p_0, p_1, p_2, p_3 et la deuxième par l'ensemble des paramètres q_0, q_1, q_2, q_3. Par conséquent, à tout ensemble des paramètres de Rodrigues-Hamilton peut être associé, par une correspondance biunivoque, un quaternion de la forme (2.3.13). Le quaternion r correspondant au résultat de deux rotations finies est le produit des quaternions p et q:

$$r = p \odot q, \qquad (2.3.17)$$

où p est le quaternion de la première rotation, q le quaternion de la deuxième rotation et $\odot$ le symbole de multiplication des quaternions.

Il est aisé de s'assurer, en tenant compte de la règle de multiplication des unités imaginaires (2.3.14), que dans le cas général

$$p \odot q \neq q \odot p. \qquad (2.3.18)$$

Cette relation montre que deux rotations successives ne sont pas permutables. A savoir, la position que le solide occupe par suite de deux rotations finies sera changée si la deuxième rotation précède la première (et, bien entendu, si leurs axes ne sont pas parallèles).

La composante p_0 intervenant dans l'expression (2.3.13) du quaternion s'appelle *partie scalaire* du quaternion p et la somme

$$\bar{p} = ip_1 + jp_2 + kp_3, \qquad (2.3.19)$$

sa *partie vectorielle*. Ainsi,

$$p = p_0 + \bar{p}. \qquad (2.3.20)$$

Le produit (2.3.17) de deux quaternions p et q peut être représenté maintenant, comme on peut s'en rendre compte facilement en appliquant les formules (2.3.14), sous la forme suivante:

$$p \odot q = p_0q_0 - \bar{p}\cdot\bar{q} + p_0\bar{q} + q_0\bar{p} + \bar{p} \times \bar{q}. \qquad (2.3.21)$$

Ici, $\bar{p} \cdot \bar{q}$ est le produit scalaire des parties vectorielles des quaternions p et q, c'est-à-dire l'expression

$$\bar{p}\cdot\bar{q} = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3, \qquad (2.3.22)$$

et $\bar{p} \times \bar{q}$ est le produit vectoriel des mêmes parties, soit:

$$\bar{p} \times \bar{q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} =$$

$$= i(p_2q_3 - p_3q_2) + j(p_3q_1 - p_1q_3) + k(p_1q_2 - p_2q_1). \qquad (2.3.23)$$

Les formules (2.3.21) à (2.3.23) s'avèrent bien commodes pour les calculs. Le fait que l'égalité (2.3.21) comporte le produit vectoriel $\bar{p} \times \bar{q}$ confirme une fois de plus la justesse de la relation (2.3.18) dans le cas général. Il ne peut y avoir exception que si $\bar{p} \times \bar{q} = 0$, le cas où les vecteurs $\bar{p}$ et $\bar{q}$ sont parallèles et donc les axes des rotations finies sont confondus.

Les formules (2.3.12) peuvent s'obtenir également à partir de l'égalité (2.3.21) si l'on groupe au second membre de cette égalité séparément la partie scalaire du quaternion et les coefficients des unités imaginaires i, j, k et qu'on les identifie ensuite respectivement à la partie scalaire et aux coefficients des mêmes unités imaginaires du quaternion r. En le faisant, on doit tenir compte des formules (2.3.17), (2.3.16), ainsi que des relations (2.3.13) et (2.3.15).

§ 4. Application des quaternions à la résolution des problèmes géométriques des suspensions à la cardan

Appliquons la théorie des rotations finies et notamment les quaternions (ou, ce qui revient en fait au même, les paramètres de Rodrigues-Hamilton) pour pouvoir résoudre d'une autre façon le problème que nous avons examiné au § 1 du chapitre précédent. Ce problème consistait à rechercher l'angle de rotation relative des anneaux intérieurs, stabilisés à l'horizontale, de deux suspensions à la cardan installées à bord d'un navire animé des mouvements de roulis et de tangage. Les axes des anneaux de cardan extérieurs sont perpendiculaires entre eux et parallèles au plan du pont du navire (v. fig. 3, *a* et 3, *b*).

Soit un anneau de cardan extérieur de la première suspension, qui tourne par rapport au pont autour de l'axe y, parallèle à l'axe longitudinal du navire, de l'angle θ (bande du navire) dans le sens des aiguilles d'une montre, si la rotation est observée du côté de l'avant du navire (v. fig. 3, *a* et 4). Suivant les formules (2.3.13) et (2.3.1), le quaternion correspondant à cette rotation est de la forme suivante:

$$p = \cos\frac{\theta}{2} - j\sin\frac{\theta}{2}. \qquad (2.4.1)$$

A son tour, la rotation de l'anneau intérieur (plate-forme stabilisée) de la première suspension autour de son axe par rapport à l'anneau

extérieur se caractérise par le quaternion

$$q = \cos\frac{\psi}{2} + i \sin\frac{\psi}{2}. \qquad (2.4.2)$$

Ici, l'angle ψ (assiette du navire) est compté en sens inverse des aiguilles d'une montre si la rotation est observée du côté du tribord, c'est-à-dire du côté de la partie positive de l'axe ξ qui coïncide, pour $\theta = 0$, avec l'axe x. Ce dernier est parallèle à l'axe transversal du navire. Le produit

$$r = p \odot q = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} - $$
$$- j\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + k\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \qquad (2.4.3)$$

détermine le quaternion r qui caractérise la position de l'anneau intérieur de la première suspension, donc du système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ qui lui est lié, par rapport au corps du navire, c'est-à-dire par rapport au système de coordonnées xyz. Lorsque les angles θ et ψ sont simultanément nuls, les axes de ces systèmes se confondent et le quaternion r devient égal à l'unité ($r_0 = 1$, $r_1 = r_2 = r_3 = 0$).

Dans la seconde suspension (v. fig. 3, *b* et 5), l'axe de l'anneau extérieur est parallèle à l'axe transversal du navire et donc le quaternion correspondant à la rotation de cet anneau s'écrit sous la forme

$$q^* = \cos\frac{\psi^*}{2} + i\sin\frac{\psi^*}{2}. \qquad (2.4.4)$$

Ici, ψ^* est l'angle de rotation de l'anneau extérieur par rapport au pont du navire; il est compté comme positif dans le même sens que l'angle ψ. Par analogie avec la formule (2.4.1), le quaternion p^* correspondant à la rotation d'angle θ^* de l'anneau intérieur de la seconde suspension à la cardan par rapport à son anneau extérieur a pour expression

$$p^* = \cos\frac{\theta^*}{2} - j\sin\frac{\theta^*}{2}. \qquad (2.4.5)$$

Le produit des quaternions

$$r^* = q^* \odot p^* \qquad (2.4.6)$$

est de la forme

$$r^* = \cos\frac{\theta^*}{2}\cos\frac{\psi^*}{2} + i\cos\frac{\theta^*}{2}\sin\frac{\psi^*}{2} - $$
$$- j\sin\frac{\theta^*}{2}\cos\frac{\psi^*}{2} - k\sin\frac{\theta^*}{2}\sin\frac{\psi^*}{2}. \qquad (2.4.7)$$

Le quaternion r^* caractérise la position du système de coordonnées $\xi^*\eta^*\zeta^*$ lié à l'anneau intérieur de la seconde suspension par rapport au système xyz, c'est-à-dire par rapport au corps du navire.

Les plans $\xi\eta$ et $\xi^*\eta^*$ des deux anneaux intérieurs étant parallèles d'après les hypothèses du problème, il s'agit de trouver l'angle χ de leur rotation relative (v. fig. 6). Aux anneaux intérieurs de la première et de la seconde suspension sont respectivement associés les systèmes de coordonnées $\xi\eta\zeta$ et $\xi^*\eta^*\zeta^*$. Par conséquent, si l'on fait tourner le système $\xi\eta\zeta$ dans le sens approprié autour de l'axe ζ (parallèle à l'axe ζ^*), les deux autres axes ξ et η de ce système deviennent respectivement parallèles aux axes ξ^* et η^* du système $\xi^*\eta^*\zeta^*$ lié à l'anneau intérieur de la seconde suspension. D'après ce qui précède, le quaternion caractérisant une telle rotation a pour expression

$$s=\cos\frac{\chi}{2}-k\sin\frac{\chi}{2}, \tag{2.4.8}$$

où χ est l'angle de rotation du système $\xi\eta\zeta$ autour de l'axe ζ dans le sens des aiguilles d'une montre si $\chi>0$ et la rotation est observée du côté de la partie positive de cet axe (v. fig. 6). Si l'on prend maintenant le produit des quaternions r et s, on obtient un nouveau quaternion qui correspond au déplacement angulaire du système $\xi\eta\zeta$ de la position xyz dans la position $\xi^*\eta^*\zeta^*$. Or, à la rotation directe du système $\xi^*\eta^*\zeta^*$ à partir de la position xyz correspond le quaternion r^*. Par conséquent,

$$r\odot s=r^*. \tag{2.4.9}$$

Le second membre de la dernière égalité est donné par la formule (2.4.7). Pour obtenir son premier membre il convient de multiplier (en appliquant les règles (2.3.14) de multiplication des unités imaginaires) les quaternions représentés par les formules (2.4.3) et (2.4.8); il vient

$$\begin{aligned} r\odot s=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\chi}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\chi}{2}+\\ +i\left(\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\chi}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\chi}{2}\right)-\\ -j\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\chi}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\chi}{2}\right)+\\ +k\left(\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\chi}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\chi}{2}\right). \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

Deux quaternions, notamment les quaternions $r\odot s$ et r^*, qui représentent des rotations finies sont égaux, si leurs parties scalaires et leurs parties vectorielles sont respectivement égales. Par suite, on tire des formules (2.4.7), (2.4.10) et de la relation (2.4.9) quatre égalités suivantes:

$$\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\chi}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\chi}{2}=\cos\frac{\theta^*}{2}\cos\frac{\psi^*}{2},$$

$$\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\chi}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\chi}{2}=\cos\frac{\theta^*}{2}\sin\frac{\psi^*}{2},$$

$$-\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\chi}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\chi}{2}=-\sin\frac{\theta^*}{2}\cos\frac{\psi^*}{2},$$
$$\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\chi}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\chi}{2}=-\sin\frac{\theta^*}{2}\sin\frac{\psi^*}{2} \qquad (2.4.11)$$

dont trois seulement sont indépendantes, vu les relations de la forme (2.3.2).

Les égalités (2.4.11) doivent être considérées dans ce cas comme des équations permettant de rechercher les grandeurs inconnues θ^*, ψ^* et χ à partir des valeurs connues de θ et ψ. Multiplions membre à membre la première et la troisième équation (2.4.11), ainsi que la deuxième et la quatrième. Il s'ensuit deux équations que nous additionnons membre à membre. Moyennant les calculs pas trop volumineux qui n'exigent que les formules trigonométriques les plus simples, on obtient finalement la relation

$$\sin\theta\cos\psi=\sin\theta^* \qquad (2.4.12)$$

qui permet de déterminer l'angle θ^* d'après les valeurs connues des angles θ et ψ. Celle-ci coïncide avec la première des relations (1.1.9) obtenues par un autre procédé au § 1 du chapitre précédent. En effectuant des calculs analogues, on peut obtenir les autres relations établies au § 1 et notamment la formule (1.1.12) donnant l'erreur de cardan, c'est-à-dire la valeur de l'angle χ. Dans le dernier cas, il convient de multiplier membre à membre la première et la quatrième équation (2.4.11), ainsi que la deuxième et la troisième et d'additionner les résultats. Après quelques transformations trigonométriques simples, on obtient

$$-\cos\psi\sin\chi=-\sin\theta^*\sin\psi^*. \qquad (2.4.13)$$

Si l'on tient compte encore de la relation (2.4.12), l'expression de l'angle χ devient représentée sous la forme de la formule cherchée (1.1.12), à savoir

$$\sin\chi=\sin\theta\sin\psi^*. \qquad (2.4.14)$$

La même formule peut s'obtenir d'une autre façon. A cet effet, considérons une suite de rotations amenant le système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ lié à l'anneau intérieur de la première suspension vers le système $\xi^*\eta^*\zeta^*$ associé à l'anneau intérieur de la seconde. Cette suite comprend une rotation d'angle ψ de l'anneau extérieur de la première suspension par rapport à l'anneau intérieur, autour de l'axe ξ dans le sens des aiguilles d'une montre ; une rotation d'angle θ du système de coordonnées xyz lié au navire, par rapport à l'anneau extérieur de la première suspension, autour de l'axe y en sens inverse des aiguilles d'une montre (v. fig. 3, *a* et 4) ; deux rotations (2.4.4) et (2.4.5) déjà examinées plus haut, qui conduisent finalement (v. fig. 3, *b* et 5)

au système de coordonnées $\xi^*\eta^*\zeta^*$. Les quaternions correspondant à ces rotations ont pour expressions

$$\begin{aligned} q^{-1} &= \cos\frac{\psi}{2} - i\sin\frac{\psi}{2}, \qquad p^{-1} = \cos\frac{\theta}{2} + j\sin\frac{\theta}{2}, \\ q^* &= \cos\frac{\psi^*}{2} + i\sin\frac{\psi^*}{2}, \qquad p^* = \cos\frac{\theta^*}{2} - j\sin\frac{\theta^*}{2}. \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Le produit de ces quaternions

$$s = q^{-1}\odot p^{-1}\odot q^*\odot p^* \tag{2.4.16}$$

correspond à une telle rotation finie du système $\xi\eta\zeta$ après laquelle ses axes deviennent respectivement parallèles aux axes du système $\xi^*\eta^*\zeta^*$. Or, pour atteindre ce résultat, il suffit de faire tourner le système $\xi\eta\zeta$ de l'angle χ autour de l'axe ζ (dans le sens des aiguilles d'une montre, si l'on observe la rotation du côté de la partie positive de cet axe (v. fig. 6)). C'est précisément à une telle rotation que correspond le quaternion s représenté par la formule (2.4.8).

La multiplication des quaternions étant associative, la relation (2.4.16) peut se mettre sous la forme

$$s = r^{-1}\odot r^*, \tag{2.4.17}$$

où

$$r^{-1} = q^{-1}\odot p^{-1} \tag{2.4.18}$$

et le quaternion r^* est représenté par les formules (2.4.6) et (2.4.7). Introduisant les deux premières expressions (2.4.15) des quaternions q^{-1} et p^{-1} dans l'égalité (2.4.18), on obtient

$$r^{-1} = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} + j\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} - k\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}. \tag{2.4.19}$$

En comparant les formules (2.4.3) et (2.4.19), il n'est pas difficile d'établir, en particulier, les égalités

$$r^{-1}\odot r = 1, \quad r\odot r^{-1} = 1 \tag{2.4.20}$$

dont la seconde signifie géométriquement le retour du système $\xi\eta\zeta$ dans sa position initiale xyz après deux rotations r et r^{-1} dont l'une annule l'autre. Il en est, certes, de même pour tous les quaternions de la forme

$$\begin{aligned} p &= \cos\frac{\varphi}{2} + il\sin\frac{\varphi}{2} + jm\sin\frac{\varphi}{2} + kn\sin\frac{\varphi}{2}, \\ p^{-1} &= \cos\frac{\varphi}{2} - il\sin\frac{\varphi}{2} - jm\sin\frac{\varphi}{2} - kn\sin\frac{\varphi}{2} \end{aligned} \tag{2.4.21}$$

représentant, eux aussi, deux rotations opposées. En effet, supposons pour fixer les idées, que le quaternion p caractérise une rotation finie d'un trièdre de la position xyz dans la position $\xi\eta\zeta$. Alors l'angle φ intervenant dans la première formule (2.4.21) est l'angle de cette rotation, et les quantités l, m, n sont les cosinus des angles que fait l'axe de rotation tant avec les axes x, y, z qu'avec les axes ξ, η, ζ. Le deuxième nombre hypercomplexe (2.4.21) peut être interprété, à son tour, comme étant le quaternion correspondant à une rotation finie autour d'un axe qui fait avec les axes ξ, η, ζ les mêmes angles que l'axe de la première rotation finie. Pourtant la rotation elle-même sera effectuée dans ce cas de l'angle $-\varphi$, c'est-à-dire en sens inverse. Par suite, le trièdre effectuera deux rotations égales mais de signes contraires autour d'un même axe, c'est-à-dire reviendra dans sa position initiale. On obtient, bien entendu, le même résultat en appliquant de façon formelle les règles (2.3.14) de multiplication des unités imaginaires. En tenant compte encore de la relation (2.3.2), on obtient

$$p\odot p^{-1} = p^{-1}\odot p = 1. \qquad (2.4.22)$$

Revenons maintenant à l'égalité (2.4.17). Compte tenu des formules (2.4.8), (2.4.19) et (2.4.7), on obtient

$$\begin{aligned}\cos\frac{\chi}{2} - k\sin\frac{\chi}{2} &= \\ &= \left[\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\psi}{2} - i\sin\frac{\psi}{2}\right) + \sin\frac{\theta}{2}\left(j\cos\frac{\psi}{2} - k\sin\frac{\psi}{2}\right)\right]\odot \\ &\qquad \odot\left[\cos\frac{\theta^*}{2}\left(\cos\frac{\psi^*}{2} + i\sin\frac{\psi^*}{2}\right) - \right. \\ &\qquad\qquad \left. - \sin\frac{\theta^*}{2}\left(j\cos\frac{\psi^*}{2} + k\sin\frac{\psi^*}{2}\right)\right]. \qquad (2.4.23)\end{aligned}$$

Comparons maintenant les parties scalaires et les coefficients des unités imaginaires au premier et au second membre de l'égalité (2.4.23). En tenant compte des règles de multiplication des unités imaginaires (2.3.14), on est conduit finalement aux relations suivantes

$$\begin{aligned}\cos\frac{\chi}{2} &= \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta^*}{2}\cos\frac{\psi^*-\psi}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta^*}{2}\cos\frac{\psi+\psi^*}{2}, \\ 0 &= \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta^*}{2}\sin\frac{\psi^*-\psi}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta^*}{2}\sin\frac{\psi+\psi^*}{2}, \\ 0 &= -\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta^*}{2}\cos\frac{\psi^*-\psi}{2} + \sin\frac{0}{2}\cos\frac{\theta^*}{2}\cos\frac{\psi+\psi^*}{2}, \\ -\sin\frac{\chi}{2} &= -\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta^*}{2}\sin\frac{\psi^*-\psi}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta^*}{2}\sin\frac{\psi^*+\psi}{2}.\end{aligned} \qquad (2.4.24)$$

Effectuons la multiplication membre à membre de la première et de la quatrième relation (2.4.24), ainsi que de la deuxième et de la troisième. On obtient deux égalités

$$\begin{gathered}-2\sin\chi = -\cos\psi\sin\theta^*\sin\psi^* - \sin\theta\sin\psi\cos\theta^* + \\ + \cos\theta\sin\psi\sin\theta^*\cos\psi^* - \sin\theta\sin\psi^*, \\ 0 = -\cos\psi\sin\theta^*\sin\psi^* - \sin\theta\sin\psi\cos\theta^* + \\ + \cos\theta\sin\psi\sin\theta^*\cos\psi^* + \sin\theta\sin\psi^*.\end{gathered} \quad (2.4.25)$$

La comparaison de la différence de leurs premiers membres et de la différence des seconds membres donne à nouveau la formule (1.1.12) établie au § 1 du chapitre précédent.

Considérons encore un exemple d'application des quaternions à la résolution des problèmes de la géométrie des rotations finies. Reprenons le problème qui a été résolu au § 2 du présent chapitre par comparaison des tables des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes de coordonnées liés à des corps tournant l'un par rapport à l'autre. Ce problème consistait à déterminer la bande θ et l'assiette ψ enregistrées par une suspension à la cardan dont l'anneau intérieur était stabilisé dans le plan horizontal. Le boîtier de la suspension à la cardan est dans ces conditions tourné avec le navire d'un angle φ autour d'un certain axe v incliné sous un angle β sur le plan xy parallèle au pont du navire (sur la fig. 35 les axes x, y et z sont représentés dans leur position initiale x_*, y_* et z_*). L'axe y du système xyz lié au boîtier de la suspension est l'axe de l'anneau extérieur (v. fig. 3, *a* et 4).

Les cosinus directeurs de l'axe v rapportés au système de coordonnées xyz ont pour valeurs

$$l = \cos\beta\cos\alpha, \quad m = \cos\beta\sin\alpha, \quad n = \sin\beta, \quad (2.4.26)$$

où α est l'angle formé par la projection de l'axe v sur le plan xy avec l'axe x.

Le quaternion h correspondant à la rotation finie d'angle φ du boîtier de la suspension à la cardan autour de l'axe v est, suivant la représentation générale (2.3.13) et les formules (2.3.1), de la forme

$$h = \cos\frac{\varphi}{2} + il\sin\frac{\varphi}{2} + jm\sin\frac{\varphi}{2} + kn\sin\frac{\varphi}{2}. \quad (2.4.27)$$

Pour $\varphi = 0$, les axes du système xyz coïncident respectivement avec les axes correspondants du système fixe $x_*y_*z_*$ dont le plan x_*y_* est horizontal.

Lorsque $\theta > 0$, l'anneau extérieur est tourné par rapport au boîtier dans le sens des aiguilles d'une montre si l'on regarde du côté de la partie positive de l'axe y. Cette rotation est donc caractérisée par le quaternion

$$p = \cos\frac{\theta}{2} - j\sin\frac{\theta}{2} \tag{2.4.28}$$

qui coïncide avec le quaternion (2.4.1) du problème précédent, déjà examiné dans le présent paragraphe. D'une manière analogue, le quaternion

$$q = \cos\frac{\psi}{2} + i\sin\frac{\psi}{2} \tag{2.4.29}$$

caractérise la rotation d'angle ψ de l'anneau intérieur par rapport à l'anneau extérieur autour de l'axe ξ du système $\xi\eta\zeta$ lié à l'anneau intérieur de la suspension à la cardan. D'après ce qui a été établi au présent paragraphe, le produit

$$s = h \odot p \odot q \tag{2.4.30}$$

est un quaternion correspondant à une rotation finie qui amène le système $\xi\eta\zeta$ de la position initiale $x_* y_* z_*$ dans sa nouvelle position. Or, par suite des rotations successives caractérisées par les quaternions h, p et q, le plan $\xi\eta$ de l'anneau de cardan intérieur reste horizontal et donc parallèle au plan $x_* y_*$. Par conséquent, le quaternion s doit avoir la même structure que dans la formule (2.4.8), à savoir

$$s = \cos\frac{\chi}{2} - k\sin\frac{\chi}{2}, \tag{2.4.31}$$

où χ est l'angle de rotation, dans le sens des aiguilles d'une montre, du système de coordonnées $x_* y_* z_*$ autour de l'axe vertical z_* (ou, ce qui revient au même, autour de l'axe ζ) jusqu'à la coïncidence simultanée de l'axe x_* avec ξ et de l'axe y_* avec η.

Le quaternion $p \odot q$ a déjà été calculé. Suivant la formule (2.4.3), il est de la forme

$$p \odot q = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} - j\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + k\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}. \tag{2.4.32}$$

En tenant compte des règles (2.3.14), multiplions les quaternions h et $p \odot q$ et revenons à l'égalité (2.4.30). Il s'ensuit que les parties réelles et imaginaires des quaternions s et $h \odot p \odot q$ sont respectivement égales. Etant donné la forme explicite (2.4.31) du quaternion s,

on obtient finalement quatre égalités suivantes:

$$
\begin{gathered}
\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\times\\
\times\left(-l\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}+m\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}-n\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\right)=\cos\frac{\chi}{2},\\
\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}+\\
+\sin\frac{\varphi}{2}\left(l\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}+m\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}+n\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}\right)=0,\\
-\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}+\\
+\sin\frac{\varphi}{2}\left(-l\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}+m\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}+n\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\right)=0,\\
\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\times\\
\times\left(-l\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}-m\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}+n\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}\right)=-\sin\frac{\chi}{2}
\end{gathered}
\tag{2.4.33}
$$

dont trois seulement sont indépendantes. Celles-ci peuvent être considérées comme des équations permettant de déterminer les valeurs de θ, ψ et χ en fonction de l'angle φ et des cosinus directeurs l, m, n. Ces derniers s'expriment à leur tour, à l'aide des formules (2.4.26), par l'intermédiaire des angles α et β.

Multiplions la deuxième et la troisième égalité respectivement par $\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}$ et $-\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}$ et additionnons les résultats obtenus. Puis, multiplions-les respectivement par $\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}$ et $-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}$ et additionnons de nouveau les résultats. On obtient, après quelques transformations simples, deux égalités

$$
\begin{gathered}
\sin\theta=\left[-l\sin\theta\sin\psi+2m\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\psi}{2}-\right.\right.\\
\left.\left.-\sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\psi}{2}\right)+n\cos\theta\sin\psi\right]\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},\\
\sin\psi=-\left[2l\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\psi}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\psi}{2}\right)+\right.\\
\left.+n\sin\theta\cos\psi\right]\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.
\end{gathered}
\tag{2.4.34}
$$

Etant donné que les angles β et φ, et par suite les angles θ et ψ, sont petits, il n'est pas difficile de déduire, compte tenu des expressions (2.4.26), les formules qui expriment les angles θ et ψ à des termes de

premier ordre en β et φ près, soit

$$\theta = \varphi \sin \alpha, \quad \psi = -\varphi \cos \alpha. \tag{2.4.35}$$

Celles-ci coïncident avec les formules (2.2.10) obtenues au § 2 du présent chapitre. Pour obtenir les formules plus exactes (2.2.11) établies au même paragraphe, il convient, en tenant compte des expressions (2.4.26), de garder dans les égalités (2.4.34) des termes jusqu'au troisième ordre inclus par rapport aux variables β, φ, θ et ψ. Commençons par donner aux égalités (2.4.34) la représentation approchée suivante:

$$\begin{aligned} \theta - \frac{1}{6}\theta^3 &= \Big[-\theta\psi\cos\alpha + 2\left(1-\frac{1}{2}\beta^2\right)\Big(1-\frac{1}{4}\theta^2 - \\ &\quad -\frac{1}{4}\psi^2\Big)\sin\alpha + \beta\psi\Big]\left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{24}\varphi^3\right), \\ \psi - \frac{1}{6}\psi^3 &= -\Big[2\left(1-\frac{1}{2}\beta^2\right)\left(1-\frac{1}{4}\theta^2 - \frac{1}{4}\psi^2\right)\cos\alpha + \\ &\quad +\beta\theta\Big]\left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{24}\varphi^3\right). \end{aligned} \tag{2.4.36}$$

Puis, en ne gardant que des termes d'ordre au plus égal à trois, mettons-les sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \theta - \varphi\sin\alpha &= -\frac{1}{2}\theta\psi\varphi\cos\alpha - \frac{1}{2}\Big(\beta^2\varphi + \frac{1}{2}\theta^2\varphi + \\ &\quad + \frac{1}{2}\psi^2\varphi - \frac{1}{6}\varphi^3\Big)\sin\alpha + \frac{1}{2}\beta\psi\varphi + \frac{1}{6}\theta^3, \\ \psi + \varphi\cos\alpha &= \frac{1}{2}\Big(\beta^2\varphi + \frac{1}{2}\theta^2\varphi + \frac{1}{2}\psi^2\varphi - \\ &\quad - \frac{1}{6}\varphi^3\Big)\cos\alpha - \frac{1}{2}\beta\theta\varphi + \frac{1}{6}\psi^3. \end{aligned} \tag{2.4.37}$$

Les seconds membres de ces dernières égalités sont de troisième ordre par rapport aux variables β, φ, θ et ψ. Aussi, sans compromettre la précision, peut-on remplacer dans ces égalités les angles θ et ψ par leurs représentations approchées (2.4.35). Après la réduction des termes semblables, on obtient des relations tout à fait équivalentes aux formules (2.2.11).

Pour déterminer l'angle χ, il convient de se servir de la dernière égalité (2.4.33). En n'y gardant que des termes de premier et de deuxième ordre en β, φ, θ et ψ, on a

$$\chi = -\frac{1}{2}\theta\psi + \frac{1}{2}\varphi\theta\cos\alpha + \frac{1}{2}\varphi\psi\sin\alpha - \beta\varphi. \tag{2.4.38}$$

En y introduisant les expressions approchées (2.4.35), on obtient, après réduction des termes semblables, la formule

$$\chi = -\beta\varphi + \frac{1}{2}\varphi^2\cos\alpha\sin\alpha \tag{2.4.39}$$

qui coïncide avec la formule (2.2.14) établie au § 2 du présent chapitre.

Les exemples traités au cours de ce paragraphe montrent que les problèmes relatifs aux rotations finies, et notamment à la géométrie des suspensions à la cardan, peuvent être résolus sans avoir à établir et à comparer les tables des cosinus des angles que forment les axes des systèmes de coordonnées convenablement liés à des corps solides qui tournent l'un par rapport à l'autre. Les calculs que comportent la multiplication des quaternions et l'établissement des équations initiales faisant intervenir les paramètres cherchés de Rodrigues-Hamilton, sont relativement simples et de même type. Pourtant, les équations ainsi obtenues sont, d'une façon générale, plus encombrantes que dans le cas où l'on a recours directement aux tables des cosinus. On peut, bien entendu, appliquer une méthode combinée pour la résolution de ces problèmes et n'utiliser les paramètres de Rodrigues-Hamilton que pour composer les tables des cosinus nécessaires que l'on devait jadis établir au moyen de tables intermédiaires. Aux §§ 5 et 7 du troisième chapitre, nous allons montrer l'emploi des matrices et des schémas spéciaux qui permettent d'algorithmiser dans une large mesure la résolution des problèmes mentionnés et sont, à ce qu'il paraît, pratiquement plus simples que les paramètres de Rodrigues-Hamilton et leur représentation quaternionique. Pourtant, ces derniers, de même que leur forme complexe (*paramètres de Cayley-Klein*), se révèlent bien utiles pour l'étude des questions cinématiques de la navigation par inertie qui seront traitées dans le chapitre VI du deuxième tome.

BIBLIOGRAPHIE

Бежко А. П., Бранец В. Н., Захаров Ю. М., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в теории конечного поворота твердого тела (*A. Bejko, V. Branets, You. Zakharov, I. Shmyglevski.* Application des quaternions dans la théorie des rotations finies d'un corps solide). — Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 1 (en russe).

Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах управления положением твердого тела (*V. Branets, I. Shmyglevski.* Application des quaternions à la résolution des problèmes de commande de position d'un corps solide). — Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 4 (en russe).

Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела (*V. Branets, I. Shmyglevski.* Application des quaternions à la résolution des problèmes d'orientation d'un corps solide). М., « Наука », 1973 (en russe).

Ганкель Г. Теория комплексных числовых систем, преимущественно обыкновенных мнимых чисел и кватернионов Гамильтона, вместе с их геометрическим толкованием (*H. Hankel.* Théorie des systèmes des nombres complexes, principalement des nombres imaginaires ordinaires et des quaternions de Hamilton, avec leur interprétation géométrique). Казань, Типо-лит. Имп. Ун-та, 1912 (en russe).

Гробов В. А., Коцюба А. В. О применении параметров Кейли-Клейна при исследовании квазипрецессионного движения свободного твердого тела

(*V. Grobov, A. Kotsuba.* Sur l'application des paramètres de Cayley-Klein à l'étude du mouvement de quasi-précession d'un corps solide libre). — Прикл. механика, 1971, т. 7, вып. 7 (en russe).
Ишлинский А. Ю. Бортовая и килевая качка и изменение курса при качке корабля вокруг произвольно ориентированной оси (*A. Ishlinsky.* Roulis, tangage et variation du cap d'un navire oscillant autour d'un axe arbitrairement orienté). — Приборостроение, 1944, № 4 (en russe).
Ишлинский А. Ю. Механика специальных гироскопических систем (*A. Ishlinsky.* Mécanique des systèmes gyroscopiques spéciaux). Киев, Изд-во АН УССР, 1952 (en russe).
Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем (*A. Ishlinsky.* Mécanique des systèmes gyroscopiques). М., Изд-во АН СССР, 1963 (en russe).
Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа (*I. Kantor, A. Solodovnikov.* Nombres hypercomplexes). М., « Наука ». 1973 (en russe).
Кучерков С. Г. Исследование кинематических уходов трехосного гиростабилизатора с помощью теории конечных поворотов (*S. Koutcherkov.* Etude des dérives cinématiques d'un gyrostabilisateur à trois axes à l'aide de la théorie des rotations finies). — Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение, 1969, т. 12, № 10 (en russe).
Лурье А. И. О теории конечных поворотов твердого тела (*A. Lourier.* Sur la théorie des rotations finies d'un corps solide). — ПММ, 1957, т. 21, вып. 4 (en russe).
Лурье А. И. Аналитическая механика (*A. Lourier.* Mécanique analytique). М., Физматгиз, 1961 (en russe).
Остромухов Я. Г., Ривкин С. С., Темченко М. Е. Геометрия и кинематика систем гироскопической стабилизации (*Ya. Ostromoukhov, S. Rivkine, M. Temtchenko.* Géométrie et cinématique des systèmes de gyrostabilisation). — Dans le recueil : Развитие механики гироскопических и инерциальных систем (Développement de la mécanique des systèmes gyroscopiques et inertiels). М., « Наука », 1973 (en russe).
Суслов Г. К. Теоретическая механика (*G. Souslov.* Mécanique rationnelle). Изд. 3-е. М.-Л., Гостехиздат, 1944 (en russe).
Ткаченко А. И. Погрешности вычисления параметров Родрига-Гамильтона (*A. Tkatchenko.* Erreurs de calcul des paramètres de Rodrigues-Hamilton). — Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 1 (en russe).
Hamilton W. R. Lectures on quaternions. Dublin, Hodges and Smith, 1853.
Hamilton W. R. Elements of quaternions, vol. 1-2. N. Y., Chelsea, 1969.
Klein F., Sommerfeld A. Über die Theorie des Kreisels. Hft 1-4. Leipzig-Berlin, Teubner, 1897/1898-1903/1910.
Korn G., Korn T. Mathematical handbook for scientists and engineers. N. Y., McGraw-Hill, 1961.
Roberson R. E. Kinematical equations for bodies whose rotation is described by the Euler-Rodrigues parameter. — AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 5.
Whittaker E. T. A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. 3rd ed. Cambridge, Univ. press, 1927.

CHAPITRE III

ORIENTATION DES MOBILES COMMANDÉS PAR GYROSCOPES

§ 1. Cap d'un véhicule donnant de la bande et de l'assiette

Le chapitre actuel se propose d'examiner des problèmes liés à la détermination de l'orientation des mobiles dont la commande ou la stabilisation est assurée par un dispositif utilisant des gyroscopes.

Un des problèmes caractéristiques de l'orientation consiste à déterminer le cap d'un mobile (par exemple, d'un navire, d'un avion ou d'une torpille) lorsqu'il donne de la bande et de l'assiette. On suppose dans ces conditions que la rotation du mobile dans le plan horizontal est obtenue à l'aide de gouvernails qui sont eux-mêmes commandés par un gyroscope suspendu à la cardan que l'on appelle *appareil de cap*.

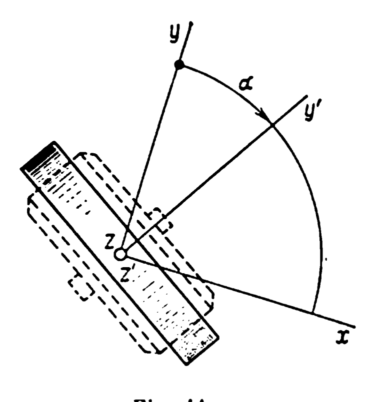


Fig. 41

Associons au mobile considéré le système de coordonnées xyz (fig. 41). A cet effet, plaçons son origine au centre de la suspension à la cardan et dirigeons l'axe y suivant l'axe longitudinal du mobile et l'axe x vers son tribord. Le plan yz devient, dans ce cas, parallèle au plan de symétrie du mobile, le plan xy, parallèle à son pont réel ou imaginaire et l'axe z, parallèle à son mât, également réel ou imaginaire.

L'axe z' de l'anneau de cardan extérieur du gyroscope se confond généralement avec l'axe z, c'est-à-dire qu'il est parallèle au plan de symétrie du mobile et perpendiculaire à son axe longitudinal (v. fig. 41). Supposons que les gouvernails agissent en permanence sur le mobile de telle sorte que l'angle α formé par l'axe y (parallèle à l'axe longitudinal du mobile) avec la perpendiculaire y' au plan de l'anneau de cardan extérieur du gyroscope varie suivant une loi donnée ou, en particulier, reste constant. On dira que l'angle α est l'*angle de calage* ou *d'alignement initial* du mobile.

Désignons par η (fig. 42) la projection de l'axe y sur le plan horizontal EN du système de coordonnées géographiques ENZ et intro-

duisons un système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ dont l'axe ζ est vertical (parallèle à l'axe Z). Faisons coïncider les origines des systèmes ENZ et $\xi\eta\zeta$ avec le centre de la suspension à la cardan. L'angle $\varkappa$ des axes horizontaux N et η (l'axe N est dirigé vers le Nord) est le cap du mobile (v. chap. I, § 1), et l'angle ψ (fig. 42) formé par les axes η

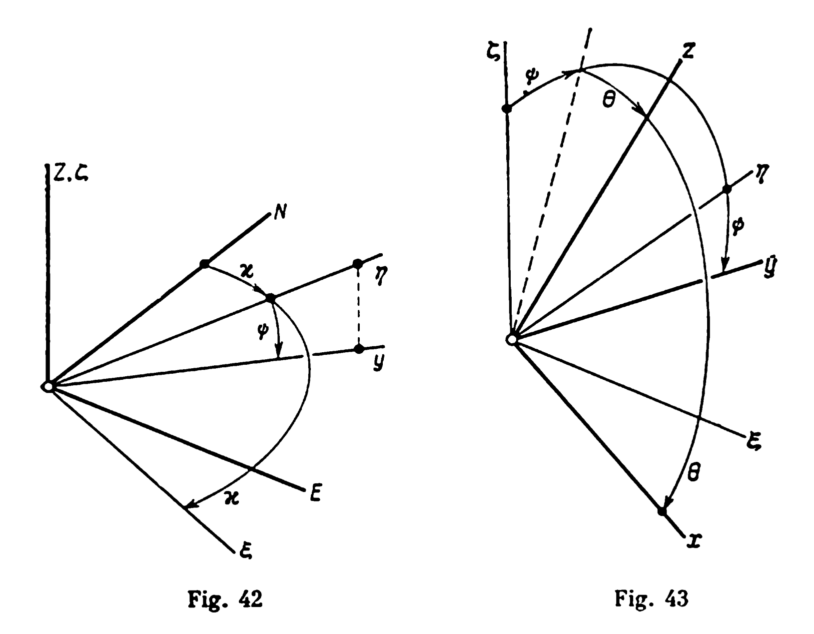


Fig. 42 Fig. 43

et y (ou, ce qui revient au même, par l'axe η et l'axe longitudinal du mobile) est son assiette. Pour $\psi > 0$, la partie positive de l'axe y se trouve sous le plan horizontal $\xi\eta$.

L'angle θ que font entre eux les axes ξ et x s'appelle (v. chap. I, § 1) bande du mobile (fig. 43). Si $\theta > 0$, le mobile donne de la bande sur tribord, de sorte que la partie positive de l'axe x se situe sous le plan horizontal $\xi\eta$.

Appelons *direction de référence* ou *de lecture* et désignons par h (fig. 44) une droite dirigée le long de la projection horizontale du vecteur moment cinétique propre H du gyroscope ou, ce qui revient au même, de l'axe de rotation propre y'' de son rotor (ce dernier axe est situé dans le plan zy' lié à l'anneau extérieur de la suspension à la cardan du gyroscope, v. plus loin fig. 47). Désignons par ε l'angle que la droite h fait avec le vecteur H, et par γ l'angle qu'elle forme avec la direction Nord, c'est-à-dire avec l'axé N. L'angle ε sera considéré comme positif si le vecteur H est situé au-dessous du plan horizontal EN (ou, ce qui revient au même, au-dessous du plan $\xi\eta$). L'angle γ est compté dans le sens des aiguilles d'une montre à partir

de la direction Nord (si on l'observe d'en haut, c'est-à-dire du côté de la partie positive de l'axe Z).

Lorsqu'un mobile se met en mouvement, les angles γ et ε se déterminent par la position que l'axe y'' de rotation propre du gyroscope a à l'instant de son débloquage. Par la suite, la direction du vecteur moment cinétique propre H, et donc de l'axe y'', par rapport au système de coordonnées ENZ varie ayant pour causes, en particulier, la rotation de la Terre [1]) et le changement de la position du mobile. Le gyroscope étant soumis à l'action des forces de frottement dans les axes de sa suspension, ainsi que (dans le cas où le centre de masse du rotor et de l'anneau intérieur ne coïncide pas avec le centre de la suspension à la cardan) des forces de pesanteur et d'inertie dues au mouvement du mobile [2]), celles-ci ont également une influence considérable sur les variations directionnelles du vecteur H. La définition de la loi qui régit les variations directionnelles du vecteur H par rapport au système de coordonnées ENZ, c'est-à-dire de la loi de variation des angles γ et ε, fait l'objet de la théorie du gyroscope suspendu à la cardan (v. tome II, chap. II) et n'est considérée ici qu'en partie, à la fin du paragraphe. Dans la partie principale de ce paragraphe, on admet que les angles γ et ε sont des fonctions données du temps qui peuvent, en particulier, être constantes.

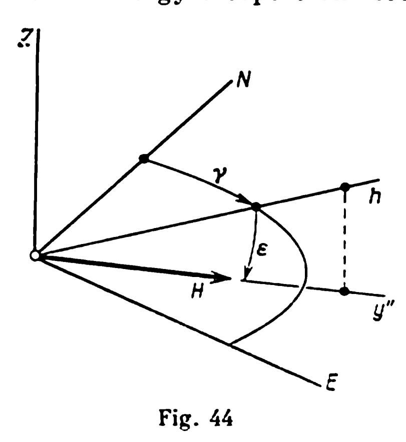


Fig. 44

L'angle fait par l'axe η (c'est-à-dire par la projection de l'axe y sur le plan horizontal) avec la direction de référence h sera appelé *azimut* du mobile et désigné par la lettre φ (fig. 45). Le cap $\varkappa$ du mobile et son azimut φ sont comptés, de même que l'angle γ, dans le plan horizontal dans le sens des aiguilles d'une montre ; ces angles sont reliés par une relation évidente

$$\varkappa = \gamma - \varphi. \tag{3.1.1}$$

Lorsque le mobile ne présente ni de la bande, ni de l'assiette, c'est-à-dire lorsque $\theta = \psi = 0$, l'axe z (z') de l'anneau extérieur de

[1]) En pratique, la variation de la direction de référence h (variation de l'angle γ) due à la rotation terrestre peut être éliminée presque complètement, par exemple grâce à un petit déplacement du centre de gravité du rotor de gyroscope le long de l'axe y'' de sa rotation propre (fig. 44). Voir aussi tome II, chap. II, § 3, fig. 62.

[2]) Le centre de masse de l'anneau extérieur du gyroscope est supposé situé sur son axe.

la suspension à la cardan du gyroscope est parallèle à l'axe ζ et est donc vertical. Il en résulte que le plan contenant l'axe z, la perpendiculaire y' au plan de l'anneau de cardan extérieur et l'axe y'' de rotation propre du rotor de gyroscope est, lui aussi, vertical. Ceci étant, l'azimut φ devient égal à l'angle de calage α (fig. 46). En effet, l'axe y se confond dans ce cas avec l'axe η, et la perpendiculaire y' au plan de l'anneau de cardan extérieur se confond avec la

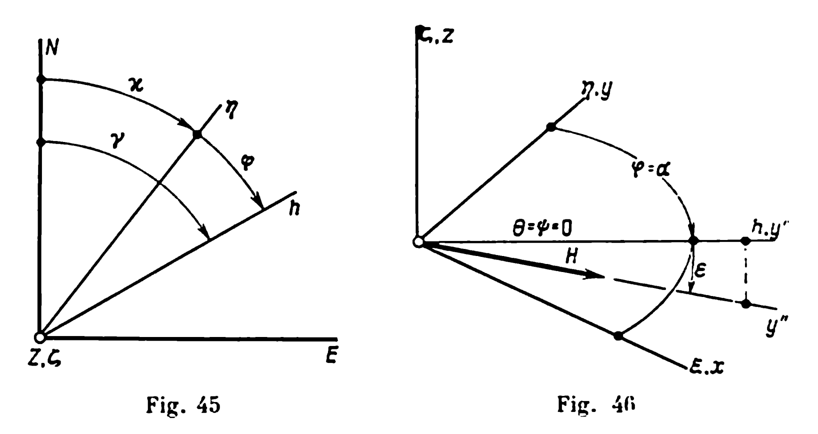


Fig. 45

Fig. 46

direction de référence h. Si la bande θ et l'assiette ψ du mobile sont différentes de zéro, on a, dans le cas général,

$$\varphi = \alpha + \chi, \tag{3.1.2}$$

où χ est l'*erreur de cap*. Au point de vue géométrique, cette dernière est analogue à l'erreur de cardan dont la valeur a été déterminée au chap. I, §§ 1 et 2.

Etant donné que l'angle γ est fixe (cet angle et l'angle ε caractérisent ensemble l'orientation de l'axe du rotor de gyroscope par rapport au système de coordonnées géographiques ENZ) et que l'angle α est défini, l'erreur de cap χ traduit, en vertu des égalités (3.1.1) et (3.1.2), la variation (de signe opposé) du cap du mobile, qui se produit par suite de la bande et de l'assiette. Dans ce qui suit, nous nous proposons de déterminer l'erreur de cap χ. Comme il sera montré plus loin, elle est fonction de la bande θ, de l'assiette ψ, ainsi que de l'angle α si les angles γ et ε sont fixes.

Remarquons que les projections du vecteur H porté par y'' sur les axes du système $\xi\eta\zeta$ (v. fig. 46) ont pour expressions:

$$\begin{aligned} H_\xi &= H \cos\varepsilon \sin\varphi, \\ H_\eta &= H \cos\varepsilon \cos\varphi, \\ H_\zeta &= -H \sin\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

La table des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes $\xi\eta\zeta$ et xyz coïncide exactement avec la table (1.1.4) établie au chap. I, § 1, c'est-à-dire est de la forme

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ \xi & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ \eta & -\sin\theta\sin\psi & \cos\psi & \cos\theta\sin\psi \\ \zeta & -\sin\theta\cos\psi & -\sin\psi & \cos\theta\cos\psi. \end{array} \qquad (3.1.4)$$

Il en découle que les projections du vecteur H sur les axes x, y, z liés au mobile ont pour valeurs

$$\begin{aligned} H_x &= H(\cos\varepsilon\sin\varphi\cos\theta - \cos\varepsilon\cos\varphi\sin\psi\sin\theta + \\ &\quad + \sin\varepsilon\cos\psi\sin\theta), \\ H_y &= H(\cos\varepsilon\cos\varphi\cos\psi + \sin\varepsilon\sin\psi), \\ H_z &= H(\cos\varepsilon\sin\varphi\sin\theta + \cos\varepsilon\cos\varphi\sin\psi\cos\theta - \\ &\quad - \sin\varepsilon\cos\psi\cos\theta). \end{aligned} \qquad (3.1.5)$$

Or, les mêmes projections peuvent s'exprimer par l'intermédiaire des angles α et β qui déterminent respectivement la rotation de

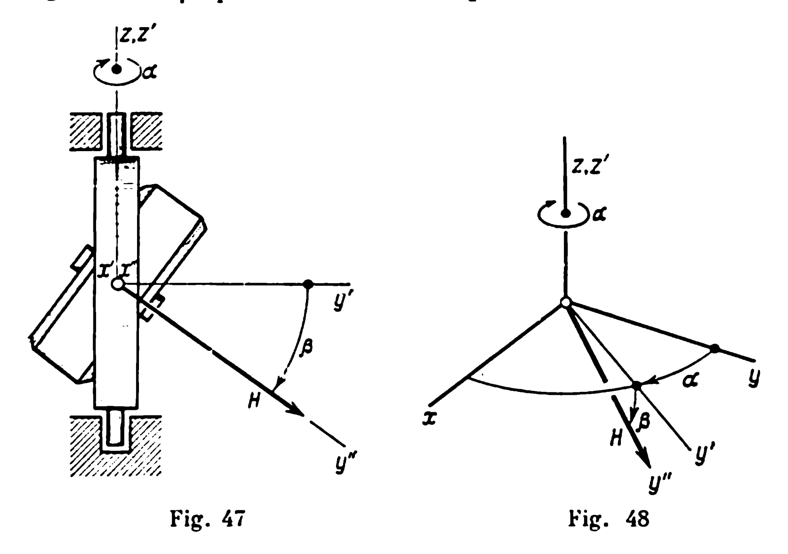


Fig. 47 Fig. 48

l'anneau extérieur de la suspension à la cardan du gyroscope par rapport au mobile lui-même et la rotation du boîtier (de l'anneau intérieur) par rapport à l'anneau extérieur. L'angle α a été introduit plus haut (v. fig. 41). Il est positif si la perpendiculaire y' au plan de l'anneau de cardan extérieur est écartée de l'axe y parallèle à l'axe longitudinal du mobile dans le sens des aiguilles d'une montre. L'angle β (fig. 47) que l'on appelle souvent en technique « *inclinaison*

de la toupie » (c'est-à-dire du rotor de gyroscope) représente l'angle que la perpendiculaire y' sus-mentionnée fait avec l'axe y'' de rotation propre du rotor de gyroscope. Convenons que, si $\beta > 0$, le vecteur H (et donc l'axe y'') est situé au-dessous du plan xy et donc la projection de ce vecteur sur l'axe z est négative.

Il est aisé de s'assurer maintenant qu'en utilisant les angles α et β on peut représenter les projections du vecteur H sur les axes du système de coordonnées xyz sous la forme suivante (fig. 48):

$$\begin{aligned} H_x &= H \cos\beta \sin\alpha, \\ H_y &= H \cos\beta \cos\alpha, \\ H_z &= -H \sin\beta. \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Le rapprochement entre les formules (3.1.5) et (3.1.6) donne trois relations suivantes:

$$\begin{aligned} \cos\beta \sin\alpha &= \cos\varepsilon \sin\varphi \cos\theta - \cos\varepsilon \cos\varphi \sin\psi \sin\theta + \\ &\qquad + \sin\varepsilon \cos\psi \sin\theta, \\ \cos\beta \cos\alpha &= \cos\varepsilon \cos\varphi \cos\psi + \sin\varepsilon \sin\psi, \\ -\sin\beta &= \cos\varepsilon \sin\varphi \sin\theta + \cos\varepsilon \cos\varphi \sin\psi \cos\theta - \\ &\qquad - \sin\varepsilon \cos\psi \cos\theta, \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

dont deux seulement sont indépendantes.

Les relations obtenues permettent de calculer l'angle φ (ainsi que l'angle β) d'après les angles donnés θ, ψ, α et ε. Si l'on tient compte encore de la formule (3.1.2), le problème de la détermination de l'erreur de cap χ se trouve résolu.

On peut établir pour χ une formule approchée valable à des termes de deuxième ordre en θ, ψ et ε près (l'angle α, c'est-à-dire l'angle de calage, peut être dans ce cas arbitraire). A cet effet, multiplions les deux membres de la première relation (3.1.7) par $\cos\alpha$ et ceux de la deuxième relation par $\sin\alpha$. Les premiers membres des relations ainsi obtenues sont identiques, ce qui implique l'égalité de leurs seconds membres. On a donc

$$\begin{aligned} (\cos\varepsilon \sin\varphi \cos\theta - \cos\varepsilon \cos\varphi \sin\psi \sin\theta + \sin\varepsilon \cos\psi \sin\theta) \cos\alpha = \\ = (\cos\varepsilon \cos\varphi \cos\psi + \sin\varepsilon \sin\psi) \sin\alpha, \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

d'où, après quelques transformations simples,

$$\begin{aligned} \cos\varepsilon \cos\theta \sin(\varphi - \alpha) + \cos\varepsilon (\cos\theta - \cos\psi) \cos\varphi \sin\alpha + \\ + \sin\varepsilon (\sin\theta \cos\psi \cos\alpha - \sin\psi \sin\alpha) - \\ - \cos\varepsilon \sin\theta \sin\psi \cos\varphi \cos\alpha = 0. \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Dans la dernière égalité, tous les termes sauf le premier sont de deuxième ordre en θ, ψ et ε. On peut s'en assurer facilement si l'on développe les fonctions trigonométriques des angles θ, ψ et ε en séries

suivant leurs arguments. Ceci signifie que la différence $\varphi - \alpha$, égale suivant la formule (3.1.2) à l'erreur de cap χ, a un ordre non inférieur au deuxième par rapport aux mêmes grandeurs. Aussi, pour déterminer la valeur de χ avec la précision indiquée plus haut peut-on remplacer dans l'égalité (3.1.9) $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ respectivement par $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$, puis $\cos\varepsilon$, $\cos\theta$, $\cos\psi$ par l'unité et enfin $\sin\varepsilon$, $\sin\theta$ et $\sin\psi$ respectivement par ε, θ et ψ. Après avoir effectué toutes ces transformations, on obtient une formule bien commode pour les calculs pratiques de l'erreur de cap:

$$\chi=\frac{1}{4}(\theta^2-\psi^2)\sin 2\alpha+\psi\theta\cos^2\alpha-\varepsilon(\theta\cos\alpha-\psi\sin\alpha). \qquad (3.1.10)$$

Exemple numérique.— Soient par exemple, $\varepsilon = 3°$, $\theta = 12°$, $\psi = 2°$ et $\alpha = 45°$. La valeur de χ calculée au moyen de la formule approchée (3.1.10) est égale à 0,007855 (27,0′). Si, en partant des relations exactes (3.1.7), on détermine au préalable l'angle φ et puis on calcule l'erreur de cap χ, à l'aide de la formule (3.1.2), on obtient $\chi = 0{,}007903$ (27,2′).

Lorsque $\varepsilon = 0$ (c'est-à-dire lorsque la direction de l'axe y'' et par suite celle du vecteur moment cinétique propre H du gyroscope sont horizontales), la structure de la formule (3.1.10) est la même que celle de (1.3.17) obtenue au chap. I, § 3 pour une rotation relative des anneaux intérieurs, stabilisés dans le plan horizontal, de deux suspensions à la cardan dont les axes des anneaux extérieurs sont parallèles au pont du navire et forment l'angle χ. Ce n'est pas un effet du hasard. Dans le cas considéré, la quantité χ peut être interprétée comme un angle de rotation relative de deux plates-formes stabilisées dans le plan horizontal, dont chacune représente le plan de l'anneau intérieur de sa suspension à la cardan. Les axes des anneaux extérieurs de ces suspensions imaginaires doivent être placés dans le plan xy parallèle au « pont » du mobile, l'un le long de l'axe y parallèle à l'axe longitudinal du mobile et l'autre sous un angle de $\pi/2 - \alpha$ par rapport au premier et donc perpendiculairement à l'axe y' introduit précédemment (v. fig. 41). Les angles θ et ψ se rapportent à la première suspension à la cardan (v. fig. 43), les axes ξ et η étant liés à son anneau intérieur stabilisé. Les angles correspondants de la seconde suspension ont été désignés au chap. I, § 3 par θ' et ψ'. Pour axe ξ' (v. chap. I, § 3) lié à l'anneau intérieur de la seconde suspension imaginaire il convient de prendre maintenant la direction de référence h (c'est-à-dire l'axe y''). Dans ces conditions, l'angle θ' devient égal, au signe près, à l'angle β « d'inclinaison de la toupie ».

La formule (1.3.17) du chap. I, § 3 se réduit à la formule (3.1.10) si dans cette dernière on pose $\varepsilon = 0$ et qu'on remplace dans la première l'angle φ des axes y et y' des anneaux extérieurs par $\pi/2 - \alpha$. De plus, les angles φ et α différant l'un de l'autre par une petite quantité χ, on déduit de la troisième relation (3.1.7) la formule

approchée

$$\beta = \varepsilon - \theta \sin \alpha - \psi \cos \alpha, \qquad (3.1.11)$$

qui se réduit, pour $\varepsilon = 0$, à la première formule (1.3.11) du chap. I, § 3. A cet effet, il suffit de remplacer dans la dernière formule la désignation φ par $\pi/2 - \alpha$ et de poser $\theta' = -\beta$. Ainsi, tant au sens géométrique qu'au sens analytique (à des désignations près) l'erreur de cap (pour $\varepsilon = 0$) n'est rien d'autre que l'erreur de cardan.

Signalons, avant de clore ce paragraphe, deux circonstances ayant trait à la stabilisation du cap d'un mobile. La première concerne le cas où l'anneau de cardan extérieur du gyroscope est soumis à l'action de forces quelconques. Pour des valeurs fixes de la bande θ, de l'assiette ψ et du cap $\varkappa$, il en résulte alors une variation de l'angle β formé par le vecteur moment cinétique propre H du gyroscope avec la perpendiculaire y' au plan de l'anneau extérieur et, par suite, une variation de l'angle ε que ce vecteur (ou, ce qui revient au même, l'axe y'') fait avec le plan horizontal $\xi\eta$. Il semble qu'en vertu de la formule (3.1.10) ceci conduirait à une variation ultérieure de l'erreur de cap χ et donc du cap $\varkappa$ du mobile. Or, une telle conclusion serait erronée car dans le cas où l'angle β varie et les angles θ, ψ et $\varkappa$ sont fixes, la variation de l'erreur de cap χ s'accompagne d'une rotation simultanée de la direction de référence h par rapport au système $\xi\eta\zeta$, si bien que le cap du mobile reste inchangé. En effet, supposons que l'anneau intérieur est soumis à l'action des forces dont la somme des moments par rapport à son axe est nulle (excepté peut-être des forces dont les couples éliminent le mouvement apparent du gyroscope autour de l'axe z, qui provient de la rotation de la Terre). Conformément à la théorie de précession du gyroscope (v. tome II, chap. II) qui décrit bien ces phénomènes, l'anneau de cardan extérieur ne tourne pas dans ce cas par rapport au mobile si sa bande, son assiette et son cap sont constants. Par conséquent, les gouvernails du mobile ne changent pas de position et rien n'empêche le mobile de continuer le mouvement en suivant le même cap.

La seconde circonstance est liée à une *correction* dite *forte* du gyroscope. Dans ce cas, le couple exercé sur l'axe de l'anneau de cardan extérieur prend une valeur telle que l'angle β (c'est-à-dire « l'inclinaison de la toupie ») disparaisse presque complètement. C'est pourquoi, l'axe y'' du rotor d'un gyroscope à correction forte reste en permanence presque perpendiculaire au plan de l'anneau de cardan extérieur malgré un mouvement de roulis et de tangage du mobile. Négligeons comme précédemment les couples des forces qui s'exercent sur l'anneau de cardan intérieur du gyroscope (à l'exception des couples qui éliminent le mouvement apparent du gyroscope par suite de la rotation de la Terre). Il s'avère dans ce cas que la vitesse angulaire de l'anneau de cardan extérieur du gyroscope, par rapport au système ENZ, a la projection nulle sur l'axe z' (z). Supposons que l'axe z,

parallèle au mât du mobile, effectue, lorsqu'il y a du roulis et du tangage, des mouvements coniques. Comme il sera montré au chap. IV, § 1, le mât ayant décrit une trajectoire fermée, l'anneau de cardan extérieur du gyroscope subira dans ce cas une rotation supplémentaire par rapport au système de coordonnées géographiques *ENZ*, d'un angle égal à la mesure de l'angle solide du cône décrit par l'axe z.

§ 2. Sur le cap d'un mobile qui commence le mouvement à partir d'un support incliné

Un problème qui s'apparente d'après sa nature géométrique au problème examiné au paragraphe précédent consiste à déterminer le cap d'un mobile après que celui-ci quitte un dispositif à support incliné. Supposons qu'à l'instant initial de mouvement la bande, l'assiette et le cap (v. chap. I, § 1) du support sont égaux respectivement à θ^0, ψ^0 et $\varkappa^0$. Admettons par ailleurs que le « pont » du mobile (par la suite le plan xy) est parallèle au plan du support (x^0y^0) et que la valeur de l'angle δ formé par l'axe longitudinal y^0 du support avec l'axe longitudinal y du mobile est petite devant l'unité (fig. 49). Le mobile est équipé d'un gyroscope suspendu à la cardan (appareil de cap, qui commande le mouvement du mobile) dont l'axe z' de l'anneau extérieur est, comme dans le paragraphe précédent, perpendiculaire au « pont » (plan xy) du mobile et dont l'axe x' du boîtier (de l'anneau intérieur) est parallèle à ce plan. Le vecteur moment cinétique propre H du gyroscope est dirigé suivant l'axe y'' de rotation propre du rotor du gyroscope.

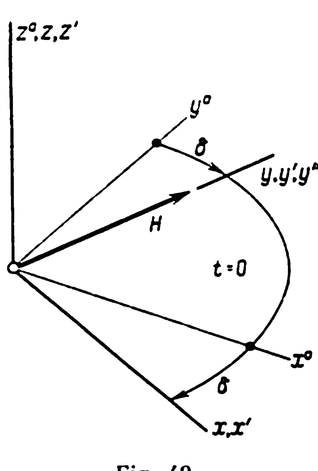


Fig. 49

Supposons également que l'anneau extérieur et le boîtier de la suspension à la cardan sont débloqués à l'instant de lancement et qu'au cours du mouvement ultérieur du mobile le vecteur H ne change pas son orientation par rapport au système de coordonnées géographiques *ENZ* dont l'origine est placé au centre de la suspension à la cardan du gyroscope (c'est-à-dire de même qu'au § 1 du présent chapitre).

Commençons par examiner une position de l'anneau de cardan extérieur et du boîtier du gyroscope pour laquelle, à l'état bloqué, l'axe y'' de rotation propre du gyroscope était dirigé suivant l'axe longitudinal y du mobile (v. fig. 49).

Désignons respectivement par θ, ψ et $\varkappa$ la bande, l'assiette et le cap du mobile qu'il a à un instant quelconque après avoir quitté son

support. Supposons d'abord que les gouvernails du mobile l'obligent à s'orienter de telle sorte que l'axe y'' (et donc le vecteur moment cinétique propre H qui est dirigé le long de cet axe) se situe pendant tout le temps de mouvement dans le plan de symétrie yz du mobile. Ainsi, au cours du mouvement du mobile, son axe longitudinal y et la perpendiculaire au plan de l'anneau de cardan extérieur du gyroscope sont parallèles (à cette situation correspondait le cas de $\alpha = 0$, envisagé dans le paragraphe précédent).

Proposons-nous de déterminer le cap $\varkappa$ du mobile en considérant que les valeurs θ^0, ψ^0, $\varkappa^0$, δ, θ et ψ sont connues. Il est évident que

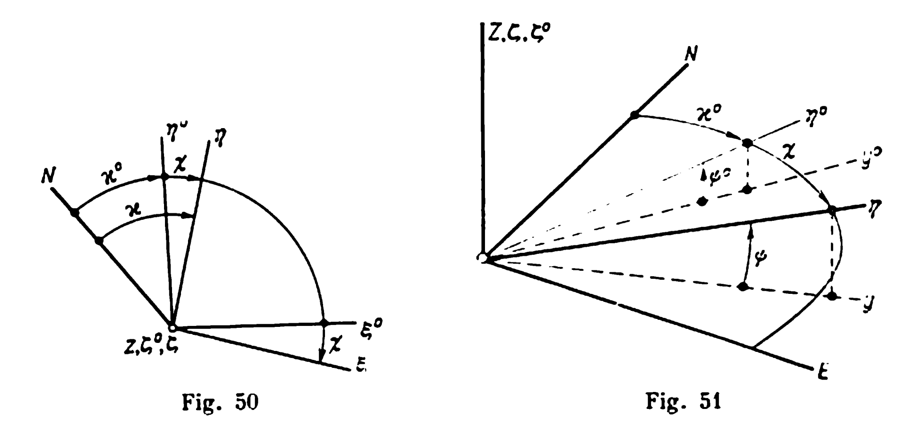


Fig. 50 Fig. 51

pour résoudre ce problème il suffit de trouver la différence

$$\chi = \varkappa - \varkappa^0, \tag{3.2.1}$$

c'est-à-dire l'angle que la projection η^0 de l'axe longitudinal y^0 du support (à l'instant initial de mouvement du mobile) sur le plan horizontal fait avec la projection η, sur le même plan, de l'axe longitudinal y du mobile (à un instant quelconque) (fig. 50 et 51).

Introduisons quatre systèmes de coordonnées ayant une origine commune placée au centre de la suspension à la cardan du gyroscope: un système $x^0y^0z^0$ lié au support et au dispositif de lancement, un système xyz lié au mobile, ainsi que des systèmes $\xi^0\eta^0\zeta^0$ et $\xi\eta\zeta$ dont les axes ζ^0 et ζ sont verticaux. L'exposé qui précède est suffisant pour déterminer entièrement les directions des axes des quatre systèmes.

Indiquons maintenant la table des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes $\xi^0\eta^0\zeta^0$ et $x^0y^0z^0$, soit

	x^0	y^0	z^0
ξ^0	$\cos\theta^0$	0	$\sin\theta^0$
η^0	$-\sin\theta^0\sin\psi^0$	$\cos\psi^0$	$\cos\theta^0\sin\psi^0$,
ζ^0	$-\sin\theta^0\cos\psi^0$	$-\sin\psi^0$	$\cos\theta^0\cos\psi^0$

(3.2.2)

ainsi que la table des cosinus des angles formés par les axes des systèmes $\xi\eta\zeta$ et xyz:

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ \xi & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ \eta & -\sin\theta\sin\psi & \cos\psi & \cos\theta\sin\psi \\ \zeta & -\sin\theta\cos\psi & -\sin\psi & \cos\theta\cos\psi. \end{array} \tag{3.2.3}$$

Elles sont analogues à la table (1.1.4) obtenue au chap. I, § 1.

Dans les hypothèses adoptées précédemment, le vecteur H était, à l'instant de lancement, parallèle au plan x^0y^0 et formait l'angle δ avec l'axe y^0 (v. fig. 49). Il s'ensuit que ses projections sur les axes x^0, y^0, z^0 ont respectivement pour valeurs

$$H_{x^0} = H\sin\delta, \quad H_{y^0} = H\cos\delta, \quad H_{z^0} = 0. \tag{3.2.4}$$

En se servant de la table (3.2.2) et des formules (3.2.4), il n'est pas difficile d'obtenir les expressions pour les projections du même vecteur H sur les axes ξ^0, η^0 et ζ^0. Ce sont:

$$\begin{aligned} H_{\xi^0} &= H\sin\delta\cos\theta^0, \\ H_{\eta} &= H(\cos\delta\cos\psi^0 - \sin\delta\sin\theta^0\sin\psi^0), \\ H_{\zeta^0} &= -H(\cos\delta\sin\psi^0 + \sin\delta\sin\theta^0\cos\psi^0). \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Comme les axes ζ^0 et ζ des systèmes $\xi^0\eta^0\zeta^0$ et $\xi\eta\zeta$ sont parallèles et l'angle des axes η^0 et η a été précédemment désigné par la lettre χ (v. fig. 50), la table des cosinus des angles que font entre eux les axes de ces systèmes est de la forme suivante:

$$\begin{array}{cccc} & \xi^0 & \eta^0 & \zeta^0 \\ \xi & \cos\chi & -\sin\chi & 0 \\ \eta & \sin\chi & \cos\chi & 0 \\ \zeta & 0 & 0 & 1. \end{array} \tag{3.2.6}$$

Cette table, jointe aux formules (3.2.5), permet de trouver les projections du vecteur H sur les axes ξ, η et ζ, à savoir

$$\begin{aligned} H_{\xi} &= H[\sin\delta\cos\theta^0\cos\chi - (\cos\delta\cos\psi^0 - \\ &\qquad\qquad - \sin\delta\sin\theta^0\sin\psi^0)\sin\chi], \\ H_{\eta} &= H[\sin\delta\cos\theta^0\sin\chi + (\cos\delta\cos\psi^0 - \\ &\qquad\qquad - \sin\delta\sin\theta^0\sin\psi^0)\cos\chi], \\ H_{\zeta} &= -H(\cos\delta\sin\psi^0 + \sin\delta\sin\theta^0\cos\psi^0). \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Or, les mêmes projections (3.2.7) peuvent être présentées sous une autre forme, en utilisant d'autres angles. Comme il a été indiqué plus haut, lorsque le mobile est en mouvement, la perpendiculaire y' au plan de l'anneau de cardan extérieur est constamment amenée en

coïncidence avec l'axe y parallèle à l'axe longitudinal du mobile. Par suite, le vecteur H se trouve en permanence dans le plan de symétrie yz du mobile. Désignons par β (fig. 52) l'angle que fait le vecteur H avec l'axe y'. De même que dans le paragraphe précédent, cet angle représente « l'inclinaison de la toupie », c'est-à-dire l'angle formé par la perpendiculaire au plan de l'anneau de cardan extérieur (qui se confond en occurrence avec l'axe longitudinal y du mobile) et l'axe de rotation propre y'' du rotor du gyroscope. L'angle β sera considéré comme positif si le vecteur H se situe au-dessous du plan xy du « pont ».

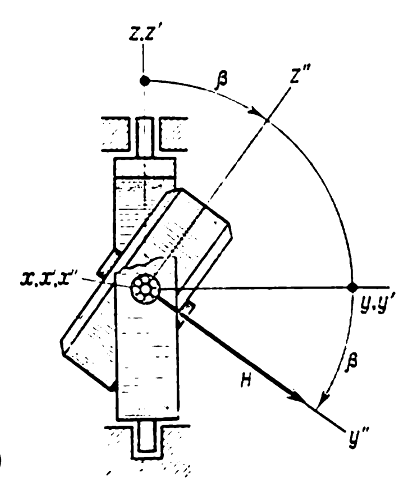


Fig. 52

Les projections du vecteur H sur les axes x, y, z (v. fig. 52) se présentent sous la forme suivante:

$$H_x = 0, \quad H_y = H \cos \beta, \quad H_z = -H \sin \beta. \qquad (3.2.8)$$

Compte tenu des dernières formules et de la table (3.2.3), les projections du même vecteur H sur les axes du système $\xi\eta\zeta$ deviennent maintenant

$$\begin{aligned} H_\xi &= -H \sin \beta \sin \theta, \\ H_\eta &= H (\cos \beta \cos \psi - \sin \beta \cos \theta \sin \psi), \\ H_\zeta &= -H (\cos \beta \sin \psi + \sin \beta \cos \theta \cos \psi). \end{aligned} \qquad (3.2.9)$$

La comparaison des formules ainsi obtenues et des formules (3.2.7) donne trois égalités suivantes:

$$\begin{aligned} P(\chi, \theta^0, \psi^0, \delta, \theta, \psi) &= \sin \delta \cos \theta^0 \cos \chi - \\ &- (\cos \delta \cos \psi^0 - \sin \delta \sin \theta^0 \sin \psi^0) \sin \chi = -\sin \beta \sin \theta, \\ \sin \delta \cos \theta^0 \sin \chi + (\cos \delta \cos \psi^0 &- \sin \delta \sin \theta^0 \sin \psi^0) \cos \chi = \\ &= \cos \beta \cos \psi - \sin \beta \cos \theta \sin \psi, \\ -\cos \delta \sin \psi^0 - \sin \delta \sin \theta^0 \cos \psi^0 &= \\ &= -\cos \beta \sin \psi - \sin \beta \cos \theta \cos \psi, \end{aligned} \qquad (3.2.10)$$

dont chacune est une conséquence de deux autres. Lorsque les valeurs θ^0, ψ^0, δ, θ et ψ sont données, la troisième égalité (3.2.10) permet de déterminer l'angle « d'inclinaison de la toupie » β, après quoi l'angle χ peut être trouvé en utilisant la première ou, avec le même succès, la deuxième égalité (3.2.10). On peut également procéder de la façon

suivante: multiplier les deux membres de la deuxième égalité par $\sin\psi$ et les deux membres de la troisième par $\cos\psi$. En additionnant membre à membre les relations obtenues, on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} Q(\chi,\ \theta^0,\ \psi^0,\ \delta,\ \theta,\ \psi) = \sin\delta\cos\theta^0\sin\psi\sin\chi - \\ -(\cos\delta\sin\psi^0+\sin\delta\sin\theta^0\cos\psi^0)\cos\psi + \\ +(\cos\delta\cos\psi^0-\sin\delta\sin\theta^0\sin\psi^0)\sin\psi\cos\chi = \\ = -\sin\beta\cos\theta. \qquad (3.2.11) \end{aligned}$$

Divisons membre à membre la première égalité (3.2.10) par (3.2.11). Il vient l'équation

$$\frac{P(\chi,\ \theta^0,\ \psi^0,\ \delta,\ \theta,\ \psi)}{Q(\chi,\ \theta^0,\ \psi^0,\ \delta,\ \theta,\ \psi)} = \operatorname{tg}\theta \qquad (3.2.12)$$

qui ne comporte qu'une seule inconnue, soit l'angle χ. En ne gardant dans cette équation que des termes d'ordre non supérieur au troisième en χ, δ, θ^0, ψ^0 et θ et en tenant compte des formules (3.2.10) et (3.2.11), il n'est pas difficile d'obtenir l'égalité approchée suivante:

$$\begin{aligned} \delta-\frac{1}{6}\delta^3-\frac{1}{2}\delta(\theta^0)^2-\frac{1}{2}\delta\chi^2-\chi+\frac{1}{6}\chi^3+\frac{1}{2}\chi\delta^2+ \\ +\frac{1}{2}\chi(\varphi^0)^2-\frac{1}{6}\theta^2(\delta-\chi) = -\psi^0\theta-\delta\theta^0\theta+\psi\theta, \qquad (3.2.13) \end{aligned}$$

qui montre que les angles χ et δ sont d'un même ordre. Il s'avère donc possible de transformer dans (3.2.13) les termes ayant le troisième ordre par rapport aux grandeurs énumérées plus haut, à savoir: de remplacer χ par δ dont la valeur est donnée. L'erreur qui en résulte est, en tout cas, d'ordre supérieur au troisième. On obtient en définitive une nouvelle formule approchée pour la différence $\chi-\delta$, qui représente dans le cas considéré l'erreur de cap au signe près (v. paragraphe précédent):

$$\chi-\delta=\theta(\psi^0-\psi)+\delta\theta^0\theta-\frac{1}{2}\delta[(\theta^0)^2-(\psi^0)^2]. \qquad (3.2.14)$$

E x e m p l e n u m é r i q u e.— Soient $\theta^0 = 8°$, $\psi^0 = 4°$, $\theta = 10°$, $\psi = -2°$ et $\delta = 6°$. Le calcul par la formule approchée (3.2.14) donne pour la différence $\chi - \delta$ la valeur de 0,02006 (1°9,0′). La valeur exacte de cette différence, trouvée par la résolution de l'équation (3.2.12) est égale à 0,02033 (1°9,9′).

Posons dans l'équation (3.2.12) $\delta = 0$, ce qui correspond au cas où l'axe du dispositif de lancement est parallèle à l'axe longitudinal du support. L'équation (3.2.12) se ramène dans ce cas à la forme

$$\sin\chi+\operatorname{tg}\theta\sin\psi\cos\chi=\operatorname{tg}\theta\cos\psi\operatorname{tg}\psi^0 \qquad (3.2.15)$$

qui ne comporte pas de la bande θ^0 du support. Si, de plus, on pose $\psi = 0$ (l'assiette nulle du mobile), on obtient la formule

$$\sin\chi=\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\psi^0. \qquad (3.2.16)$$

Cette dernière peut également s'obtenir d'une façon plus simple si l'on admet dès le début que l'assiette ψ du mobile est nulle et que l'axe du dispositif de lancement est parallèle à l'axe longitudinal du support, c'est-à-dire si l'on pose $\delta = 0$. Du fait du parallélisme des axes mentionnés, il résulte immédiatement que la bande θ^0 du support doit être sans effet sur l'orientation ultérieure du mobile suivant l'azimut, quelles que soient les valeurs de ψ^0, θ et ψ. La même conclusion découle de l'équation (3.2.15) qui montre que les variations de la bande du support n'influent pas sur la différence $\varkappa - \varkappa_0 = \chi$ et par conséquent sur le cap $\varkappa$ du mobile.

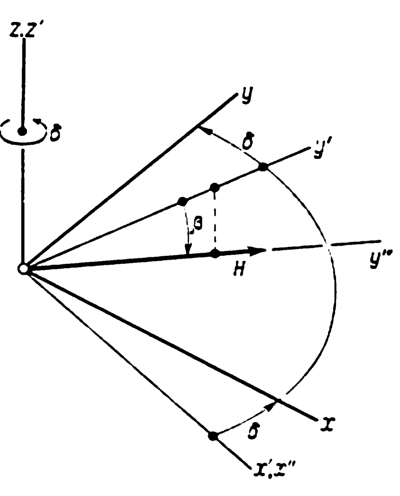


Fig. 53

Nous avons considéré jusqu'à présent le mouvement du mobile sans tenir compte du positionnement angulaire de l'appareil gyroscopique (v. § 1 du présent chapitre). C'est pourquoi, lorsque la bande et l'assiette du support et du mobile sont nulles, l'axe longitudinal y du mobile se trouve décalé d'angle δ vers la droite par rapport à la direction que l'axe longitudinal y^0 du support a à l'instant de démarrage du mobile. Ce décalage peut être éliminé, à une erreur due à la bande et à l'assiette du support et du mobile près, si l'on assure à l'appareil gyroscopique une position appropriée en le faisant tourner de même angle δ mais vers la gauche. Etant donné un tel positionnement angulaire, le système de commande oblige les gouvernails de mettre constamment le mobile dans une position pour laquelle l'axe longitudinal du mobile fait l'angle δ avec la perpendiculaire y' au plan de l'anneau de cardan extérieur du gyroscope (fig. 53). Supposons, comme précédemment, qu'à l'instant initial ($t = 0$) ces deux axes, c'est-à-dire y et y' sont confondus et font l'angle δ avec l'axe longitudinal y^0 du support (v. fig. 49). Le mobile s'étant mis en mouvement, son axe y change l'orientation jusqu'à l'instant où, comme il vient d'être dit, l'angle qu'il fait avec l'axe y' atteint la valeur de δ. En particulier, lorsque la bande et l'assiette du support et du mobile sont nulles ($\theta^0 = \psi^0 = \theta = \psi = 0$), le cap du mobile est exactement égal au cap du support et ne différera pas de ce dernier par l'angle δ, comme c'était dans le cas où on ne tenait pas compte du positionnement angulaire.

Désignons toujours par la lettre χ la différence cherchée entre le cap actuel $\varkappa$ du mobile et le cap $\varkappa_0$ du support à l'instant initial.

Dans le cas considéré, c'est l'angle χ (et non la différence $\chi - \delta$, comme précédemment) qui constitue l'erreur de cap. En même temps χ représente (v. fig. 51) l'angle formé par les axes η^0 et η des systèmes $\xi^0\eta^0\zeta^0$ et $\xi\eta\zeta$ introduits plus haut (les axes η^0 et η sont les projections respectives sur le plan horizontal de l'axe longitudinal y^0 du support à l'instant de lancement et de l'axe longitudinal y du mobile à un instant quelconque).

Les projections du vecteur moment cinétique propre H sur les axes ξ, η, ζ, exprimées par l'intermédiaire des angles θ^0, ψ^0, δ et χ, sont données évidemment par les mêmes formules (3.2.7), parce que les conditions dans lesquelles le mobile commence son mouvement à partir du support restent exactement les mêmes que dans le premier cas, examiné plus haut dans ce paragraphe. Exprimons maintenant ces projections par les angles θ, ψ, β qui se rapportent au mobile lorsque ce dernier a tourné de l'angle δ par suite du décalage initial de l'appareil gyroscopique. A cet effet, introduisons un système de coordonnées $x'y'z'$ lié à l'anneau extérieur de la suspension à la cardan du gyroscope et ayant son origine au centre de cette suspension (v. fig. 53). L'axe z' de ce système se confond avec l'axe z du système xyz associé au mobile, l'axe x' est l'axe de l'anneau de cardan intérieur et l'axe y' est, comme il a déjà été indiqué plus haut, perpendiculaire au plan de l'anneau de cardan extérieur. La table des cosinus des angles formés par les axes des systèmes $x'y'z'$ et xyz (v. fig. 53) est de la forme:

	x	y	z	
x'	$\cos\delta$	$-\sin\delta$	0	(3.2.17)
y'	$\sin\delta$	$\cos\delta$	0	
z'	0	0	1,	

car l'angle que font entre eux les axes y et y' lors du mouvement du mobile est maintenu égal à δ.

L'axe y'' du rotor du gyroscope est situé dans le plan $y'z'$ et forme l'angle β avec l'axe y' (v. fig. 53). Par suite, les projections du vecteur moment cinétique propre H porté par y'' sur les axes x', y', z' ont pour valeurs:

$$H_{x'} = 0, \quad H_{y'} = H\cos\beta, \quad H_{z'} = -H\sin\beta. \qquad (3.2.18)$$

En utilisant la table (3.2.17) ou directement la figure 53, on peut obtenir des expressions donnant les projections du même vecteur H sur les axes du système xyz, soit

$$H_x = H\cos\beta\sin\delta, \quad H_y = H\cos\beta\cos\delta, \quad H_z = -H\sin\beta. \qquad (3.2.19)$$

Utilisons maintenant la table (3.2.3) des cosinus des angles formés par les axes des systèmes $\xi\eta\zeta$ et xyz et établissons, compte tenu des

expressions (3.2.19), les formules suivantes pour les projections du vecteur H sur les axes ξ, η, ζ, exprimées par l'intermédiaire des angles θ, ψ, δ et β:

$$H_\xi = H(\cos\beta \sin\delta \cos\theta - \sin\beta \sin\theta),$$
$$H_\eta = -H(\cos\beta \sin\delta \sin\theta \sin\psi - \cos\beta \cos\delta \cos\psi + \\ + \sin\beta \cos\theta \sin\psi), \qquad (3.2.20)$$
$$H_\zeta = -H(\cos\beta \sin\delta \sin\theta \cos\psi + \cos\beta \cos\delta \sin\psi + \\ + \sin\beta \cos\theta \cos\psi).$$

La comparaison entre les formules (3.2.20) et (3.2.7) donne trois relations suivantes (dont deux seulement sont indépendantes) qui comprennent les valeurs inconnues des angles χ et β:

$$\sin\delta \cos\theta^0 \cos\chi - (\cos\delta \cos\psi^0 - \sin\delta \sin\theta^0 \sin\psi^0) \sin\chi = \\ = \cos\beta \sin\delta \cos\theta - \sin\beta \sin\theta,$$
$$\sin\delta \cos\theta^0 \sin\chi + (\cos\delta \cos\psi^0 - \sin\delta \sin\theta^0 \sin\psi^0) \cos\chi = \\ = -\cos\beta \sin\delta \sin\theta \sin\psi + \cos\beta \cos\delta \cos\psi - \\ - \sin\beta \cos\theta \sin\psi,$$
$$-\cos\delta \sin\psi^0 - \sin\delta \sin\theta^0 \cos\psi^0 = -\cos\beta \sin\delta \sin\theta \cos\psi - \\ - \cos\beta \cos\delta \sin\psi - \sin\beta \cos\theta \cos\psi. \qquad (3.2.21)$$

Faisons usage de ces relations pour trouver une équation qui ne fait intervenir qu'une seule inconnue, à savoir l'angle χ. A cet effet, multiplions la première relation par $\cos\delta$, la deuxième par $-\sin\delta \times \times \cos\theta \cos\psi$, la troisième par $\sin\delta \cos\theta \sin\psi$ et faisons la somme des produits obtenus. Il vient une nouvelle égalité

$$[\sin\delta \cos\theta^0 \cos\chi - (\cos\delta \cos\psi^0 - \sin\delta \sin\theta^0 \sin\psi^0) \sin\chi] \times \\ \times \cos\delta - [\sin\delta \cos\theta^0 \sin\chi + \\ + (\cos\delta \cos\psi^0 - \sin\delta \sin\theta^0 \sin\psi^0) \cos\chi] \times \\ \times \sin\delta \cos\theta \cos\psi - (\cos\delta \sin\psi^0 + \sin\delta \sin\theta^0 \cos\psi^0) \times \\ \times \sin\delta \cos\theta \sin\psi = -\sin\beta \cos\delta \sin\theta. \qquad (3.2.22)$$

Si la deuxième et la troisième égalité (3.2.21) sont multipliées respectivement par $\sin\delta \sin\theta \cos\psi + \cos\delta \sin\psi$ et $-\sin\delta \sin\theta \times \times \sin\psi + \cos\delta \cos\psi$ et puis additionnées, on obtient encore une égalité

$$[\sin\delta \cos\theta^0 \sin\chi + (\cos\delta \cos\psi^0 - \sin\delta \sin\theta^0 \sin\psi^0) \cos\chi] \times \\ \times (\sin\delta \sin\theta \cos\psi + \cos\delta \sin\psi) + \\ + (\cos\delta \sin\psi^0 + \sin\delta \sin\theta^0 \cos\psi^0) \times \\ \times (\sin\delta \sin\theta \sin\psi - \cos\delta \cos\psi) = \\ = -\sin\beta \cos\delta \cos\theta. \qquad (3.2.23)$$

Divisons maintenant membre à membre les égalités (3.2.22) et (3.2.23). Il en résulte une équation

$$\frac{A\cos\chi+B\sin\chi+C}{D\cos\chi+E\sin\chi+F}=\operatorname{tg}\theta \tag{3.2.24}$$

contenant l'angle cherchée χ. Ici,

$$\begin{aligned}
A &= \sin\delta\cos\delta\cos\theta^0 - \\
&\quad -(\cos\delta\cos\psi^0-\sin\delta\sin\theta^0\sin\psi^0)\sin\delta\cos\theta\cos\psi,\\
B &= -\sin^2\delta\cos\theta^0\cos\theta\cos\psi - \\
&\quad -(\cos\delta\cos\psi^0-\sin\delta\sin\theta^0\sin\psi^0)\cos\delta,\\
C &= -(\cos\delta\sin\psi^0+\sin\delta\sin\theta^0\cos\psi^0)\sin\delta\cos\theta\sin\psi, \\
D &= (\cos\delta\cos\psi^0-\sin\delta\sin\theta^0\sin\psi^0)(\sin\delta\sin\theta\cos\psi + \\
&\quad +\cos\delta\sin\psi),\\
E &= \sin\delta\cos\theta^0(\sin\delta\sin\theta\cos\psi+\cos\delta\sin\psi),\\
F &= (\cos\delta\sin\psi^0+\sin\delta\sin\theta^0\cos\psi^0)\times\\
&\quad\times(\sin\delta\sin\theta\sin\psi-\cos\delta\cos\psi).
\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

Divisons le numérateur et le dénominateur du premier membre de l'équation (3.2.24) par $\cos^2\delta$. Compte tenu des désignations (3.2.25), on obtient

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\delta\,[\cos\theta^0-(\cos\psi^0-\operatorname{tg}\delta\sin\theta^0\sin\psi^0)\cos\theta\cos\psi]\cos\chi - \\
&-[\operatorname{tg}^2\delta\cos\theta^0\cos\theta\cos\psi+(\cos\psi^0-\operatorname{tg}\delta\sin\theta^0\sin\psi^0)]\sin\chi - \\
&-\operatorname{tg}\delta\cos\theta\sin\psi\,(\sin\psi^0+\operatorname{tg}\delta\sin\theta^0\cos\psi^0) = \\
&=\operatorname{tg}\theta\,[(\cos\psi^0-\operatorname{tg}\delta\sin\theta^0\sin\psi^0)\times\\
&\times(\operatorname{tg}\delta\sin\theta\cos\psi+\sin\psi)\cos\chi + \\
&+\operatorname{tg}\delta\cos\theta^0(\operatorname{tg}\delta\sin\theta\cos\psi+\sin\psi)\sin\chi + \\
&+(\sin\psi^0+\operatorname{tg}\delta\sin\theta^0\cos\psi^0)(\operatorname{tg}\delta\sin\theta\sin\psi-\cos\psi)].
\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

Gardons dans cette équation encombrante les seuls termes de premier, deuxième et troisième ordre en χ, δ, ψ^0, θ^0, ψ et θ. Il en résulte une égalité approchée

$$\begin{aligned}
\chi = &-\frac{1}{2}\delta(\theta^0)^2+\frac{1}{2}\delta(\psi^0)^2+\frac{1}{2}\delta\theta^2+\frac{1}{2}\delta\psi^2-\delta^2\chi + \\
&+\frac{1}{2}(\psi^0)^2\chi+\frac{1}{6}\chi^3-\delta\psi^0\psi-\delta\theta^2-\theta\psi+\psi^0\theta+\delta\theta^0\theta.
\end{aligned} \tag{3.2.27}$$

Il découle de cette dernière égalité que l'expression pour χ ne doit pas contenir des termes de premier ordre en δ, θ^0, ψ^0, θ et ψ. Aussi, en négligeant au second membre les termes $-\delta^2\chi$, $(\psi^0)^2\chi/2$ et $\chi^3/6$ dont l'ordre est supérieur au troisième, on obtient finalement la formule permettant de déterminer l'erreur de cap avec la précision

indiquée plus haut:

$$\chi = \theta(\psi^0 - \psi) + \frac{1}{2}\delta[(\psi - \psi^0)^2 - (\theta - \theta^0)^2]. \qquad (3.2.28)$$

On voit que la structure de la formule (3.2.28) est analogue à celle de la formule (3.2.14).

Exemple numérique.— Soient $\theta^0 = 8°$, $\psi^0 = 4°$, $\delta = 6°$, $\theta = 10°$, $\psi = -2°$. Le calcul au moyen de la formule approchée (3.2.28) donne $\chi = 0{,}01898$ (1°5,3′); en résolvant l'équation exacte (3.2.24), on obtient $\chi = 0{,}01897$ (1°5,2′).

Les calculs effectués par la formule (3.2.28), de même que ceux faits au moyen de la formule analogue (3.2.14), montrent que pour obtenir une orientation en cap suffisamment précise il faut que la bande du mobile soit faible. Cette conclusion n'est valable que pour un tel positionnement de l'appareil gyroscopique (considéré plus haut) pour lequel l'axe de son rotor à l'état bloqué est parallèle à l'axe longitudinal du mobile. Si la bande θ est nulle, l'erreur de cap est dans ce cas, pour les valeurs numériques indiquées plus haut des grandeurs ψ^0, θ^0, δ et ψ, de l'ordre de deux à cinq minutes seulement. Nous allons examiner un peu plus loin un autre positionnement de l'appareil gyroscopique à bord du mobile, qui présente des propriétés légèrement différentes.

Remarquons que dans le cas où le mobile est lancé à partir d'un support horizontal ($\theta^0 = \psi^0 = 0$), on peut arriver à une conclusion erronée sur la précision du fonctionnement de l'appareil gyroscopique, par suite de la bande et de l'assiette du mobile lors de son mouvement ultérieur. En effet, en posant dans la formule (3.2.26) $\theta^0 = \psi^0 = 0$ et en admettant de plus, pour simplifier, que $\delta = 0$, on obtient

$$\sin\chi = -\operatorname{tg}\theta \sin\psi \cos\chi, \qquad (3.2.29)$$

d'où, avec une approximation suffisante,

$$\chi = -\theta\psi. \qquad (3.2.30)$$

Par conséquent, si le mobile présente, au cours de son mouvement, par exemple une assiette $\psi < 0$, alors dans le cas d'une bande sur bâbord, c'est-à-dire pour $\theta < 0$, l'angle χ sera négatif malgré l'emploi d'un gyroscope précis, ce qui correspondra à une dérive du mobile vers la droite par rapport à la direction assignée. Au contraire, à une bande sur tribord du mobile correspondra une dérive de l'axe longitudinal dans le sens opposé. La valeur de cette dérive (si la bande θ n'est pas suffisamment petite) peut être assez grande. Par exemple, pour $\theta = -12°$, $\psi = -2°$ on a $\chi = -0{,}007311$ (−25,1′).

Dans ce qui précède, nous avons considéré les cas où le plan de l'anneau de cardan extérieur du gyroscope était, à l'état bloqué,

perpendiculaire à l'axe longitudinal y du mobile, et le vecteur moment cinétique propre H du gyroscope était parallèle à cet axe. Examinons maintenant un autre cas où le plan de l'anneau de cardan extérieur est, à l'état bloqué, parallèle au plan de symétrie yz du mobile et donc l'axe y'' du rotor du gyroscope est dirigé à l'instant du lancement du mobile, de même que l'axe y', le long de l'axe x, c'est-à-dire est parallèle à l'axe transversal du mobile (fig. 54). Admettons, comme précédemment, que tant que le mobile se trouve dans son dispositif de lancement, le plan yz de sa symétrie est perpendiculaire au plan x^0y^0 du support et que son axe longitudinal y est parallèle à ce plan et, comme précédemment, fait l'angle δ avec l'axe longitudinal y^0 du support. Le vecteur moment cinétique propre H du gyroscope est orienté suivant l'axe y'' du rotor et donc, à l'instant du lancement, est parallèle, lui aussi, au plan x^0y^0. Par suite, les projections de ce vecteur sur les axes du système de coordonnées $x^0y^0z^0$ lié au support sont de la forme

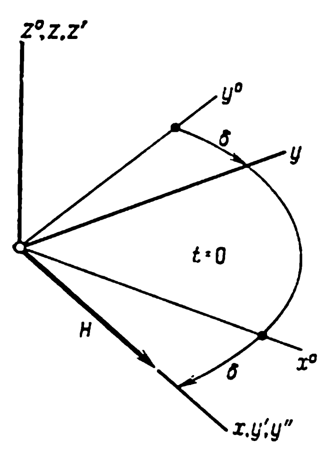


Fig. 54

$$H_{x^0} = H\cos\delta, \quad H_{y^0} = -H\sin\delta,$$
$$H_{z^0} = 0. \qquad (3.2.31)$$

En faisant usage de la table (3.2.2) des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes $\xi^0\eta^0\zeta^0$ et $x^0y^0z^0$, on peut trouver les projections du vecteur H sur les axes du système $\xi^0\eta^0\zeta^0$, soit

$$\begin{aligned} H_{\xi^0} &= H\cos\delta\cos\theta^0, \\ H_{\eta^0} &= -H(\cos\delta\sin\theta^0\sin\psi^0 + \sin\delta\cos\psi^0), \qquad (3.2.32) \\ H_{\zeta^0} &= -H(\cos\delta\sin\theta^0\cos\psi^0 - \sin\delta\sin\psi^0). \end{aligned}$$

Enfin, en se servant de la table (3.2.6), on trouve les projections du vecteur moment cinétique propre H du gyroscope sur les axes ξ, η, ζ:

$$\begin{aligned} H_\xi &= H\,[\cos\delta\cos\theta^0\cos\chi + (\cos\delta\sin\theta^0\sin\psi^0 + \\ &\qquad + \sin\delta\cos\psi^0)\sin\chi], \\ H_\eta &= H\,[\cos\delta\cos\theta^0\sin\chi - (\cos\delta\sin\theta^0\sin\psi^0 + \\ &\qquad + \sin\delta\cos\psi^0)\cos\chi], \\ H_\zeta &= -H\,(\cos\delta\sin\theta^0\cos\psi^0 - \sin\delta\sin\psi^0). \qquad (3.2.33) \end{aligned}$$

Pour rechercher l'angle χ, il faut maintenant exprimer les projections du vecteur H sur les mêmes axes ξ, η et ζ par l'intermédiaire des angles θ, ψ et β (c'est-à-dire la bande du mobile, son assiette et

l'angle d'« inclinaison de la toupie »). A la différence du cas étudié plus haut, nous admettrons ici que l'axe longitudinal y du mobile est ramené sans cesse, par l'action du système de commande des gouvernails, en coïncidence avec le plan $x'z'$ de l'anneau de cardan extérieur du gyroscope (fig. 55) et donc reste en permanence parallèle et de sens contraire par rapport à l'axe x' de l'anneau de cardan intérieur (confondu avec l'axe x''). De ce fait, les projections du vecteur H sur les axes x, y, z liés au mobile ont pour expressions:

$$H_x = H\cos\beta, \quad H_y = 0, \quad H_z = -H\sin\beta. \tag{3.2.34}$$

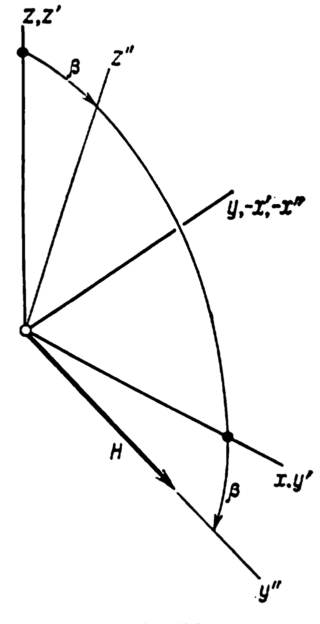


Fig. 55

En utilisant la table (3.2.3) des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes $\xi\eta\zeta$ et xyz, déterminons les projections du même vecteur H sur les axes ξ, η, ζ. Il vient

$$\begin{aligned} H_\xi &= H(\cos\beta\cos\theta - \sin\beta\sin\theta), \\ H_\eta &= -H(\cos\beta\sin\theta\sin\psi + \sin\beta\cos\theta\sin\psi), \\ H_\zeta &= -H(\cos\beta\sin\theta\cos\psi + \sin\beta\cos\theta\cos\psi). \end{aligned} \tag{3.2.35}$$

Par hypothèse, le vecteur H ne change son orientation ni par rapport à la verticale du lieu, ni par rapport aux points cardinaux (c'est-à-dire par rapport au système de coordonnées géographiques ENZ ayant son origine au centre de la suspension à la cardan). Ceci nous permet d'égaler les dernières expressions aux seconds membres respectifs des formules (3.2.33) dans lesquelles les projections du vecteur H sur les mêmes axes ξ, η et ζ sont exprimées par l'intermédiaire des angles θ^0, ψ^0, δ (qui déterminent la position du mobile au départ) et de l'angle cherché χ. On obtient ainsi trois relations suivantes:

$$\begin{aligned} &\cos\delta\cos\theta^0\cos\chi + (\cos\delta\sin\psi^0\sin\theta^0 + \sin\delta\cos\psi^0)\sin\chi = \cos(\beta+\theta), \\ &\cos\delta\cos\theta^0\sin\chi - (\cos\delta\sin\psi^0\sin\theta^0 + \sin\delta\cos\psi^0)\cos\chi = -\sin(\beta+\theta)\sin\psi, \\ &-\cos\delta\cos\psi^0\sin\theta^0 + \sin\delta\sin\psi^0 = -\sin(\beta+\theta)\cos\psi, \end{aligned} \tag{3.2.36}$$

dont chacune est une conséquence de deux autres. Les grandeurs inconnues dans les relations (3.2.36) sont χ et β.

Divisons membre à membre la deuxième relation (3.2.36) par la troisième. Nous obtenons l'équation suivante pour déterminer l'angle χ :

$$\frac{\cos\delta\cos\theta^0\sin\chi-(\cos\delta\sin\psi^0\sin\theta^0+\sin\delta\cos\psi^0)\cos\chi}{-\cos\delta\cos\psi^0\sin\theta^0+\sin\delta\sin\psi^0}=\operatorname{tg}\psi. \qquad (3.2.37)$$

L'angle θ n'intervient pas dans l'équation (3.2.37). Ceci signifie que dans le cas considéré (l'axe y'' du rotor est dirigé, à l'instant initial du mouvement, suivant l'axe transversal x du mobile et est écarté d'angle δ de l'axe transversal x^0 du support), le cap du mobile, égal suivant la formule (3.2.1) à la somme $\varkappa^0 + \chi$, ne dépend pas de la bande θ du mobile, à la différence du cas précédent. Cette circonstance bien importante est facile à vérifier directement, si l'on remarque que, par définition, l'axe x' de l'anneau intérieur de la suspension du rotor du gyroscope est, lors du mouvement ultérieur du mobile, parallèle et de sens contraire par rapport à son axe longitudinal y, grâce à l'action des gouvernails.

Lorsque l'assiette ψ du mobile est nulle, l'équation (3.2.37) déterminant l'angle χ se ramène à la forme

$$\operatorname{tg}\chi=\frac{\cos\delta\sin\psi^0\sin\theta^0+\sin\delta\cos\psi^0}{\cos\delta\cos\theta^0}. \qquad (3.2.38)$$

Si, de plus on admet que $\delta = 0$ (l'axe du dispositif de démarrage est parallèle à l'axe longitudinal du support), l'angle χ caractérise l'erreur de cap égale à la différence entre le cap du support et du mobile à l'instant initial et le cap actuel du mobile lors de son mouvement ultérieur. L'égalité (3.2.38) prend dans ce cas la forme

$$\operatorname{tg}\chi = \sin\psi^0 \operatorname{tg}\theta^0. \qquad (3.2.39)$$

La formule (3.2.39) peut s'obtenir d'une façon plus simple si dès le début les angles ψ et δ sont supposés nuls.

Revenons au cas général de l'équation (3.2.37) en considérant de nouveau que les angles δ et ψ sont différents de zéro. Il est aisé de s'assurer que les angles χ et δ ne diffèrent l'un de l'autre que par des quantités de deuxième ordre en ψ, θ^0 et ψ^0. En effet, l'équation (3.2.37) peut se mettre sous la forme

$$\cos\theta^0\sin\chi - \sin\psi^0\sin\theta^0\cos\chi - \operatorname{tg}\delta\cos\psi^0\cos\chi =$$
$$= -\cos\psi^0\sin\theta^0\operatorname{tg}\psi + \operatorname{tg}\delta\sin\psi^0\operatorname{tg}\psi. \qquad (3.2.40)$$

Gardons maintenant dans les deux membres de cette équation les seuls termes d'ordre non supérieur au troisième en χ, δ, θ^0, ψ^0, θ et ψ. On obtient une égalité

$$\chi-\frac{1}{6}\chi^3-\frac{1}{2}\chi(\theta^0)^2-\psi^0\theta^0-\delta-\frac{1}{3}\delta^3+\frac{1}{2}\delta(\psi^0)^2+\frac{1}{2}\delta\chi^2=-\theta^0\psi+\delta\psi^0\psi \qquad (3.2.41)$$

qui permet de conclure que les angles χ et δ sont de même ordre par rapport aux grandeurs ψ, θ^0 et ψ^0. En mettant à profit cette circonstance, on peut écrire la formule

$$\chi-\delta=(\psi^0-\psi)\,\theta^0+\delta\psi^0\psi+\frac{1}{2}\,\delta\,(\theta^0)^2-\frac{1}{2}\,\delta\,(\psi^0)^2 \qquad (3.2.42)$$

qui est valable à des termes de troisième ordre en ψ, θ^0 et ψ^0 près.

Exemple numérique.— Prenons les mêmes valeurs numériques que dans l'exemple précédent, c'est-à-dire $\theta^0 = 8°$, $\psi^0 = 4°$, $\psi = -2°$, $\delta = 6°$. Dans ce cas, on obtient pour la différence $\chi - \delta$ une valeur de 0,01513 (52′) en appliquant la formule approchée (3.2.42), et de 0,01506 (51,8′) en résolvant l'équation exacte (3.2.37).

§ 3. Sur les indications de l'appareil gyroscopique mesurant l'assiette du mobile

En plus de l'appareil gyroscopique de cap, un mobile peut porter d'autres appareils gyroscopiques destinés à la résolution des différents problèmes liés à la commande de son mouvement. C'est ainsi que dans le système commandant le mouvement du mobile dans le

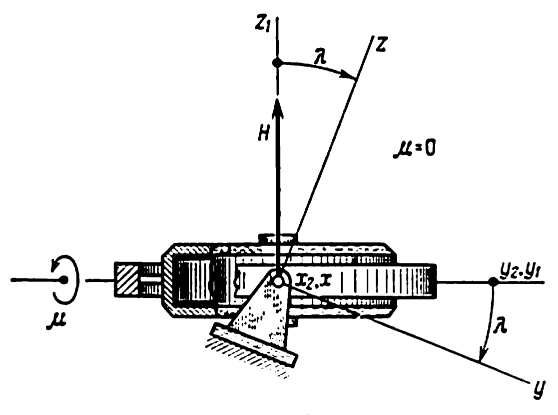


Fig. 56

plan vertical ou, dans le cas général, pour une variation prescrite de son altitude, on peut utiliser un gyroscope suspendu à la cardan dont l'axe x_2 de l'anneau extérieur est perpendiculaire au plan de symétrie du mobile (fig. 56). Posons que l'axe y_1 de l'anneau intérieur de la suspension était dirigé, avant la mise en marche et le déblocage du gyroscope, parallèlement à l'axe longitudinal du mobile et que l'axe z_1 du rotor du gyroscope se trouvait dans le plan de symétrie du mobile et était parallèle à son « mât ». Désignons par λ l'angle de rotation courant de l'anneau de cardan extérieur par rapport au

mobile au cours du mouvement ultérieur de ce dernier. L'angle λ, égal à zéro au commencement du mouvement, est utilisé dans le système de commande des gouvernails, dits verticaux, du mobile qui font varier l'angle d'inclinaison de son axe longitudinal sur le plan horizontal, c'est-à-dire la valeur de l'assiette. Lorsque la bande du mobile est nulle et son axe longitudinal est horizontal à l'instant du démarrage, l'angle courant λ est exactement égal à la valeur courante de l'assiette ψ du mobile. Dans ce cas, on suppose, bien entendu, que l'axe z_1 du rotor du gyroscope reste vertical pendant toute la durée du mouvement grâce à des mesures spéciales prises à cet effet. Comme il a été dit au § 1 du présent chapitre, la dérive du gyroscope par rapport au système de coordonnées géographiques ENZ est due à la rotation terrestre et au déplacement du mobile par rapport à la Terre, ainsi qu'à l'action sur le gyroscope de diverses forces perturbatrices qui créent des moments par rapport aux axes des anneaux intérieur et extérieur de la suspension (frottement, équilibrage imparfait, etc.).

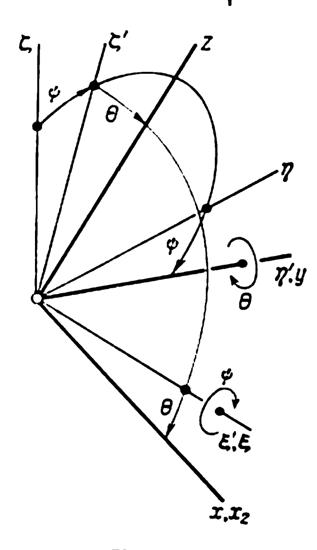


Fig. 57

Pareillement à ce que nous avons fait au cours des paragraphes précédents, associons au mobile un système de coordonnées xyz en plaçant son origine au centre de la suspension à la cardan du gyroscope. Orientons l'axe y suivant l'axe longitudinal du mobile dans le sens de son mouvement, l'axe x perpendiculairement au plan de symétrie du mobile vers son tribord (il se confond dans ce cas avec l'axe x_2 de l'anneau extérieur de la suspension). Dans ces conditions, l'axe z sera dirigé vers le haut (fig. 57).

L'angle ψ formé entre l'axe longitudinal du mobile et le plan horizontal ou, ce qui revient au même, entre l'axe y lié au mobile et sa projection η sur le plan horizontal est évidemment l'assiette du mobile. D'après ce qui a été établi au chap. I, § 1, admettons que pour $\psi > 0$ la partie positive de l'axe y se trouve sous le plan horizontal passant par le centre de la suspension à la cardan. Comme précédemment, nous appellerons cap du mobile l'angle $\varkappa$ compté dans le sens des aiguilles d'une montre à partir de la direction Nord jusqu'à la projection η de l'axe longitudinal du mobile (ou, ce qui revient au même, de l'axe y) sur le plan horizontal (v. fig. 42).

Par ailleurs, introduisons un système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ ayant son origine au centre de la suspension à la cardan, de même que le système xyz (v. fig. 57). L'axe ζ de ce système est vertical et l'axe η

est, comme il vient d'être indiqué, la projection de l'axe y sur le plan horizontal; il est évident que l'axe ξ se situe également dans le plan horizontal. L'angle θ fait par l'axe ξ avec l'axe x lié au mobile est la bande du mobile. Lorsque les valeurs de l'angle θ sont positives (v. chap. I, § 1), le mobile présente de la bande sur tribord.

Supposons que les valeurs courantes de la bande θ et de l'assiette ψ diffèrent des valeurs initiales θ_0 et ψ_0 qu'elles avaient à l'instant où le mobile a commencé son mouvement. Supposons également que la valeur courante du cap du mobile diffère, elle aussi, de sa valeur initiale. Désignons par φ (fig. 58) la valeur de cette variation du cap, c'est-à-dire l'angle fait par l'axe η avec sa direction initiale η_0. Dans ce cas, l'angle λ, introduit précédemment, que font entre eux l'axe longitudinal y du mobile et l'axe y_1 de l'anneau intérieur de la suspension à la cardan du gyroscope n'est plus égal à l'angle ψ, c'est-à-dire à l'assiette du mobile. Dans le présent paragraphe, nous nous proposons de déterminer l'angle λ en fonction des angles θ_0, ψ_0, θ, ψ et φ qui viennent d'être énumérés. Pour le faire, nous supposons, comme précédemment, qu'au cours du mouvement du mobile l'axe du rotor du gyroscope ne change pratiquement pas sa direction par rapport à la verticale du lieu et par rapport aux points cardinaux, c'est-à-dire conserve une orientation inchangée dans le système de coordonnées géographiques ENZ (v. l'hypothèse analogue adoptée au § 1 du présent chapitre).

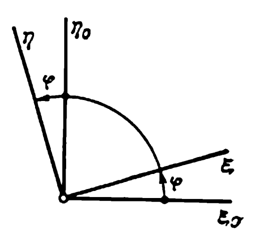


Fig. 58

Pour l'analyse qui suit nous aurons besoin de la table des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes de coordonnées xyz et $\xi\eta\zeta$. Introduisons, pareillement à ce que nous avons fait au chap. I, § 1, un système de coordonnées auxiliaires $\xi'\eta'\zeta'$ (v. fig. 57) dont la position est déterminée par la rotation d'angle ψ, dans le sens des aiguilles d'une montre, du système $\xi\eta\zeta$ autour de l'axe ξ qui se confond avec l'axe ξ' (la rotation est observée du côté de la partie positive de l'axe ξ). Par suite de cette rotation, l'axe η' est amené en coïncidence avec l'axe y du système xyz lié au mobile.

La table des cosinus des angles formés par les axes des systèmes $\xi'\eta'\zeta'$ et $\xi\eta\zeta$ a la forme suivante:

$$\begin{array}{cccc} & \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & 1 & 0 & 0 \\ \eta' & 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ \zeta' & 0 & \sin\psi & \cos\psi. \end{array} \qquad (3.3.1)$$

Quant à la position des axes x, y, z, elle se détermine par une autre rotation, à savoir par la rotation d'angle θ, en sens inverse des aiguil-

les d'une montre, du système $\xi'\eta'\zeta'$ autour de l'axe η' ou, ce qui revient au même, autour de l'axe y parallèle à l'axe longitudinal du mobile (la rotation est à observer du côté de la partie positive de l'axe η'). La table des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes xyz et $\xi'\eta'\zeta'$ est de la forme

	ξ'	η'	ζ'
x	$\cos\theta$	0	$-\sin\theta$
y	0	1	0
z	$\sin\theta$	0	$\cos\theta.$

(3.3.2)

En appliquant des procédés habituels (v. chap. I, § 1), il est facile d'obtenir à partir des tables (3.3.1) et (3.3.2), la table cherchée des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes xyz et $\xi\eta\zeta$. Il vient

	ξ	η	ζ
x	$\cos\theta$	$-\sin\theta\sin\psi$	$-\sin\theta\cos\psi$
y	0	$\cos\psi$	$-\sin\psi$
z	$\sin\theta$	$\cos\theta\sin\psi$	$\cos\theta\cos\psi.$

(3.3.3)

On voit qu'elle est la même que la table (1.1.4) du chap. I, § 1.

Désignons par $x_0y_0z_0$, $\xi_0'\eta_0'\zeta_0'$ et $\xi_0\eta_0\zeta_0$ les positions respectives des systèmes xyz, $\xi'\eta'\zeta'$ et $\xi\eta\zeta$ à l'instant initial du mouvement du mobile. A partir de la table (3.3.3) on obtient, en y changeant les désignations, la table suivante des cosinus des angles formés entre les axes des systèmes de coordonnées $x_0y_0z_0$ et $\xi_0\eta_0\zeta_0$:

	ξ_0	η_0	ζ_0
x_0	$\cos\theta_0$	$-\sin\theta_0\sin\psi_0$	$-\sin\theta_0\cos\psi_0$
y_0	0	$\cos\psi_0$	$-\sin\psi_0$
z_0	$\sin\theta_0$	$\cos\theta_0\sin\psi_0$	$\cos\theta_0\cos\psi_0.$

(3.3.4)

Ici, θ_0 et ψ_0 désignent, comme précédemment, les valeurs de la bande et de l'assiette du mobile à l'instant initial de son mouvement.

Faisons abstraction des erreurs possibles dans le fonctionnement de l'appareil gyroscopique qui commande les gouvernails verticaux du mobile. Les axes η_0 et η rapportés au système de coordonnées ENZ se confondent si le cap est inchangé. Pourtant, dans le cas général où le mobile subit des rotations programmées, ces axes font entre eux, comme il a déjà été indiqué, un angle φ (v. fig. 58) que l'on appelle généralement *angle de cap* du mobile. Nous admettrons que pour $\varphi > 0$ le système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ est tourné autour de l'axe ζ_0, qui se confond avec l'axe ζ, en sens inverse des aiguilles d'une montre, par rapport au système $\xi_0\eta_0\zeta_0$ si cette rotation est observée d'en haut. La table des cosinus des angles formés par les axes des

systèmes $\xi\eta\zeta$ et $\xi_0\eta_0\zeta_0$ est de la forme

	ξ_0	η_0	ζ_0
ξ	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	0
η	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
ζ	0	0	1.

(3.3.5)

L'axe z_1 du rotor du gyroscope étant dirigé, à l'instant initial du mouvement, suivant l'axe z_0 du système $x_0y_0z_0$ lié au mobile, le vecteur moment cinétique propre H du gyroscope sera orienté suivant le même axe. De ce fait, les projections du vecteur H sur les axes ξ_0, η_0, ζ_0 s'expriment, suivant la table (3.3.4), par les formules

$$\begin{aligned} H_{\xi_0} &= H\sin\theta_0, \\ H_{\eta_0} &= H\cos\theta_0\sin\psi_0, \\ H_{\zeta_0} &= H\cos\theta_0\cos\psi_0. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

En utilisant ensuite les données de la table (3.3.5), on peut trouver les projections du même vecteur sur les axes du système $\xi\eta\zeta$:

$$\begin{aligned} H_\xi &= H\,(\sin\theta_0\cos\varphi + \cos\theta_0\sin\psi_0\sin\varphi), \\ H_\eta &= H\,(-\sin\theta_0\sin\varphi + \cos\theta_0\sin\psi_0\cos\varphi), \\ H_\zeta &= H\,\cos\theta_0\cos\psi_0. \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Enfin, en faisant usage des données de la table (3.3.3), on peut obtenir des expressions, un peu trop volumineuses, pour les projections du vecteur moment cinétique propre H du gyroscope sur les axes x, y, z (toujours dans l'hypothèse que l'axe du rotor du gyroscope ne change pas son orientation par rapport au système de coordonnées géographiques ENZ). Ces expressions sont

$$\begin{aligned} H_x = H\,[&(\sin\theta_0\cos\varphi + \cos\theta_0\sin\psi_0\sin\varphi)\cos\theta + \\ &+ (-\sin\theta_0\sin\varphi + \cos\theta_0\sin\psi_0\cos\varphi)(-\sin\theta\sin\psi) + \\ &+ \cos\theta_0\cos\psi_0(-\sin\theta\cos\psi)], \\ H_y = H\,[&(-\sin\theta_0\sin\varphi + \cos\theta_0\sin\psi_0\cos\varphi)\cos\psi + \\ &+ \cos\theta_0\cos\psi_0(-\sin\psi)], \\ H_z = H\,[&(\sin\theta_0\cos\varphi + \cos\theta_0\sin\psi_0\sin\varphi)\sin\theta + \\ &+ (-\sin\theta_0\sin\varphi + \cos\theta_0\sin\psi_0\cos\varphi)\cos\theta\sin\psi + \\ &+ \cos\theta_0\cos\psi_0\cos\theta\cos\psi]. \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Comme le vecteur H est orienté suivant l'axe z_1 lié à l'anneau intérieur de la suspension à la cardan du gyroscope, les projections de ce vecteur sur les axes x, y et z peuvent également être exprimées

par l'intermédiaire des angles λ et μ de rotations respectives de l'anneau de cardan extérieur par rapport au mobile et de l'anneau intérieur par rapport à l'anneau extérieur (fig. 59). C'est la comparaison de ces nouvelles expressions pour les projections mentionnées avec des expressions anciennes, c'est-à-dire les formules (3.3.8), qui permet de déterminer l'angle cherché λ, ainsi que l'angle μ.

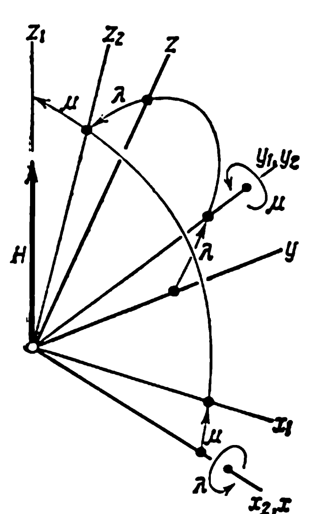


Fig. 59

Pour obtenir des formules correspondantes, attachons d'abord à l'anneau de cardan extérieur un système de coordonnées $x_2y_2z_2$ et à l'anneau de cardan intérieur un système $x_1y_1z_1$ (v. fig. 59). Lorsque les angles λ et μ sont nuls, les axes de ces systèmes se confondent respectivement avec les axes x, y, z liés au mobile. Si $\lambda > 0$, le système $x_2y_2z_2$ est tourné autour de l'axe x_2, confondu avec l'axe x, en sens inverse des aiguilles d'une montre, par rapport au système xyz, lorsque la rotation est observée du côté de la partie positive de l'axe x_2 (x). Pour $\mu > 0$, le système $x_1y_1z_1$ est tourné autour des axes confondus y_2 et y_1, dans le sens des aiguilles d'une montre, par rapport au système $x_2y_2z_2$ si l'on regarde du côté de la partie positive de l'axe y_1 (y_2) (fig. 59 et 60). En appliquant les mêmes procédés que pour l'établissement de la table (3.3.3), il est aisé d'obtenir la table suivante des cosinus des angles formés entre les axes des systèmes $x_1y_1z_1$ et xyz:

	x	y	z	
x_1	$\cos\mu$	$-\sin\lambda\sin\mu$	$\cos\lambda\sin\mu$	(3.3.9)
y_1	0	$\cos\lambda$	$\sin\lambda$	
z_1	$-\sin\mu$	$-\sin\lambda\cos\mu$	$\cos\lambda\cos\mu$.	

En tenant compte du fait que l'axe du rotor se confond avec l'axe z_1, nous tirons de la dernière table les formules cherchées pour les projections du vecteur H sur les axes x, y, z exprimées par l'intermédiaire des angles λ et μ:

$$\begin{aligned} H_x &= -H\sin\mu, \\ H_y &= -H\sin\lambda\cos\mu, \\ H_z &= H\cos\lambda\cos\mu. \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

La comparaison entre les formules (3.3.10) et (3.3.8) donne trois relations suivantes dont chacune est une conséquence de deux autres:

$$\begin{aligned}
-\sin\mu &= (\sin\theta_0\cos\varphi + \cos\theta_0\sin\psi_0\sin\varphi)\cos\theta + \\
&+ (-\sin\theta_0\sin\varphi + \cos\theta_0\sin\psi_0\cos\varphi)\times \\
&\times(-\sin\theta\sin\psi) + \cos\theta_0\cos\psi_0(-\sin\theta\cos\psi), \\
-\sin\lambda\cos\mu &= (-\sin\theta_0\sin\varphi + \cos\theta_0\sin\psi_0\cos\varphi)\cos\psi + \\
&+ \cos\theta_0\cos\psi_0(-\sin\psi), \qquad (3.3.11) \\
\cos\lambda\cos\mu &= (\sin\theta_0\cos\varphi + \cos\theta_0\sin\psi_0\sin\varphi)\sin\theta + \\
&+ (-\sin\theta_0\sin\varphi + \cos\theta_0\sin\psi_0\cos\varphi)\cos\theta\times \\
&\times\sin\psi + \cos\theta_0\cos\psi_0\cos\theta\cos\psi.
\end{aligned}$$

Ce sont justement les relations qui permettent de déterminer les angles λ et μ, lorsque les angles θ_0, ψ_0, θ, ψ et φ sont donnés.

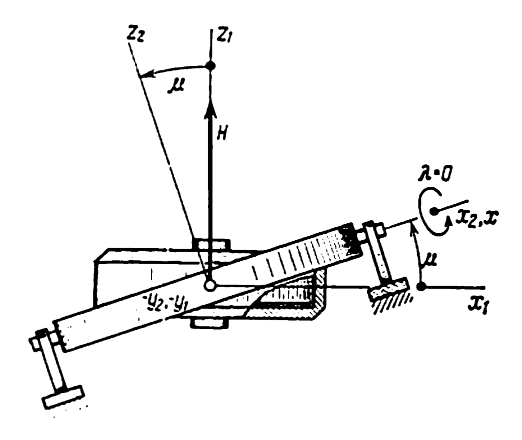


Fig. 60

L'angle μ de rotation de l'anneau de cardan intérieur par rapport à l'anneau extérieur n'est pas généralement enregistré dans le système de commande du mouvement. C'est le seul angle λ de rotation de l'anneau de cardan extérieur par rapport à sa position initiale à bord du mobile qui présente un intérêt pratique. En divisant membre à membre les deux dernières relations, on obtient la formule suivante pour l'angle λ:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{(\sin\theta_0\sin\varphi - \cos\theta_0\sin\psi_0\cos\varphi)\cos\psi + \cos\theta_0\cos\psi_0\sin\psi}{a\sin\theta + b\cos\theta\sin\psi + c\cos\theta\cos\psi}. \qquad (3.3.12)$$

On voit sans peine qu'on a introduit ici les désignations suivantes:

$$\begin{aligned} a &= \cos\,(\widehat{z_0, \xi}) = \sin\theta_0 \cos\varphi + \cos\theta_0 \sin\psi_0 \sin\varphi, \\ b &= \cos\,(\widehat{z_0, \eta}) = -\sin\theta_0 \sin\varphi + \cos\theta_0 \sin\psi_0 \cos\varphi, \qquad (3.3.13) \\ c &= \cos\,(\widehat{z_0, \zeta}) = \cos\theta_0 \cos\psi_0. \end{aligned}$$

Compte tenu des désignations (3.3.13), la formule (3.3.12) peut se mettre sous une forme plus commode, bien qu'un peu plus encombrante

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\dfrac{\operatorname{tg}\psi}{\cos\theta} - \dfrac{\operatorname{tg}\psi_0}{\cos\theta}\cos\varphi + \dfrac{\operatorname{tg}\theta_0}{\cos\psi_0\cos\theta}\sin\varphi}{1 + \left(\operatorname{tg}\psi_0\operatorname{tg}\psi + \dfrac{\operatorname{tg}\theta_0\operatorname{tg}\theta}{\cos\psi_0\cos\psi}\right)\cos\varphi + \left(\dfrac{\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\psi_0}{\cos\psi} - \dfrac{\operatorname{tg}\theta_0\operatorname{tg}\psi}{\cos\psi_0}\right)\sin\varphi}. \qquad (3.3.14)$$

Si les angles ψ_0, θ_0, ψ et θ sont petits (ne dépassent pas 15° à 20°), on peut, en négligeant dans la dernière formule les termes du troisième ordre par rapport à ces angles et à leurs produits, obtenir une formule approchée suivante pour l'angle λ:

$$\lambda = \psi - \psi_0 \cos\varphi + \theta_0 \sin\varphi. \qquad (3.3.15)$$

Exemple numérique.— Soient par exemple, $\theta_0 = 6°$, $\psi_0 = 3°$, $\psi = 15°$, $\theta = -15°$, $\varphi = 30°$. Le calcul au moyen de la dernière formule donne $\lambda = 0{,}2688$ (15°24,1′), alors que la formule exacte (3.3.14) donne $\lambda = 0{,}2869$ (16°26,4′).

Envisageons maintenant quelques cas particuliers.

Admettons qu'au commencement du mouvement la bande et l'assiette du mobile étaient nulles. En posant dans la formule (3.3.14) $\theta_0 = \psi_0 = 0$, on obtient

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\operatorname{tg}\psi}{\cos\theta}, \qquad (3.3.16)$$

quelle que soit la valeur du cap φ du mobile.

Exemple numérique.— Soient par exemple, $\psi = 15°$, $\theta = 15°$. Le calcul par la formule exacte (3.3.16) donne un résultat de $\lambda = 0{,}2706$ (15°30,2′) qui ne diffère que par 30,2′ de la valeur approchée $\lambda = \psi = 15°$ obtenue à l'aide de la formule (3.3.15). Si la bande atteint 30°, cette différence dépasse 2°. En effet, pour le même angle d'assiette $\psi = 15°$ la formule (3.3.16) donne $\lambda =$ $= 0{,}3001$ (17°11,5′).

Posons maintenant dans la formule (3.3.14) $\varphi = 0$, ce qui correspond au mouvement du mobile sans changement du cap. On obtient

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\psi_0}{\cos\theta\left(1 + \operatorname{tg}\psi_0\operatorname{tg}\psi + \dfrac{\operatorname{tg}\theta_0\operatorname{tg}\theta}{\cos\psi_0\cos\psi}\right)}. \qquad (3.3.17)$$

E x e m p l e n u m é r i q u e.— Soient en particulier, $\theta_0 = 6°$, $\psi_0 = 3°$, $\theta = -15°$, $\psi = 15°$. Le calcul par la formule (3.3.17) donne $\lambda = 0{,}2228$ (12°46'). La valeur approchée de l'angle λ est dans ce cas égale à 12°, comme ceci résulte de la formule (3.3.15) pour $\varphi = 0$.

Si, de plus, la bande du mobile est nulle, alors en posant dans la formule (3.3.17) $\theta_0 = \theta = 0$, on obtient la relation

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \psi_0}{1 + \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \psi_0} \tag{3.3.18}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\lambda = \psi - \psi_0. \tag{3.3.19}$$

La dernière égalité s'ensuit également des considérations géométriques simples.

§ 4. Orientation d'un mobile commandé par deux gyroscopes

Dans certains cas, les mouvements angulaires des objets peuvent s'effectuer sous l'action conjuguée des gouvernes commandées par deux gyroscopes libres suspendus à la cardan. Dans ce qui suit, nous examinons sur l'exemple de la fusée allemande connue V-2, les questions géométriques de l'orientation de tels mobiles dans l'hypothèse où les axes des rotations propres des rotors des gyroscopes conservent leur position inchangée par rapport aux directions vers les étoiles fixes.

Associons au mobile un repère direct xyz. L'axe z sera appelé axe longitudinal du mobile. Admettons que dans la position de départ du mobile les axes x, y, z se confondent respectivement avec les axes d'un système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ qui ne présente pas de rotation par rapport aux directions vers les étoiles fixes (fig. 61). Les axes x_1 et y_2 des anneaux de cardan extérieurs des deux gyroscopes tournent dans des paliers solidaires du mobile. Ils sont perpendiculaires entre eux, le premier étant parallèle à l'axe x et le deuxième à l'axe y. Posons qu'au départ du mobile l'axe η_1 de rotation propre du rotor du premier gyroscope, appelé *gyrohorizon* dans le présent paragraphe, est parallèle à l'axe y, donc à l'axe η, et que l'axe ξ_2 du second gyroscope, appelé *gyroscope de verticale*, est parallèle à l'axe x qui se confond, dans la position de départ du mobile, avec l'axe ξ. Il est évident que dans la position de départ les axes ζ_1 et ζ_2 des boîtiers des deux gyroscopes (v. fig. 61) sont, en vertu des hypothèses adoptées, parallèles à l'axe longitudinal z du mobile, ainsi qu'à l'axe ζ.

Dans ce qui suit, nous supposerons que les gyroscopes ne présentent pas de dérives. Ceci signifie que lors du mouvement du mobile les axes de leurs rotors ne changent pas de direction par

rapport au système $\xi\eta\zeta$. Ainsi, l'axe η_1 reste parallèle à η, et l'axe ξ_2 parallèle à ξ.

Introduisons, en plus du système xyz lié au mobile et du système $\xi\eta\zeta$ exempt de rotation, des systèmes de coordonnées $x_1y_1z_1$ et $x_2y_2z_2$ liés aux anneaux de cardan extérieurs des gyroscopes, et des systèmes $\xi_1\eta_1\zeta_1$ et $\xi_2\eta_2\zeta_2$ liés à leurs boîtiers [1]). Comme il a déjà été indiqué plus haut, l'axe x_1 est constamment parallèle à l'axe x, et l'axe y_2 est parallèle à l'axe y. En outre, l'axe z_1 est confondu avec ζ_1, et l'axe z_2 avec ζ_2.

De ce qui précède, nous pouvons conclure que dans la position de départ du mobile les axes correspondants de tous les six systèmes

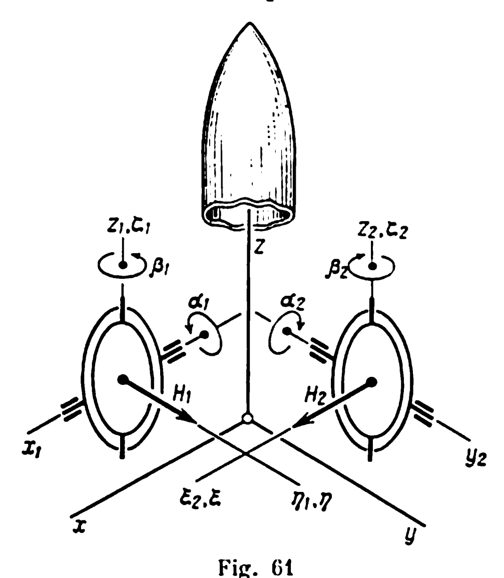


Fig. 61

de coordonnées xyz, $x_1y_1z_1$, $\xi_1\eta_1\zeta_1$, $x_2y_2z_2$, $\xi_2\eta_2\zeta_2$ et $\xi\eta\zeta$ sont soit parallèles, soit confondus. Dans le cas d'une orientation quelconque du mobile, ne sont constamment parallèles deux à deux que les axes x et x_1, y et y_2, η_1 et η, ξ_2 et ξ et en outre, comme il vient d'être dit, sont constamment confondus les axes z_1 et ζ_1, ainsi que les axes z_2 et ζ_2 qui sont respectivement les axes des boîtiers du premier et du deuxième gyroscope.

Désignons maintenant par α_1 l'angle de rotation de l'anneau de cardan extérieur du premier gyroscope par rapport au mobile (fig. 62). Lorsque $\alpha_1 = 0$, les axes x_1, y_1, z_1 liés à cet anneau extérieur sont respectivement parallèles aux axes x, y, z liés au mobile. Posons

[1]) Les origines des systèmes $\xi\eta\zeta$, xyz, $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$ et des autres systèmes auxiliaires sont, pour plus de commodité, confondues sur les figures qui suivent.

$\alpha_1 > 0$ si le système $x_1y_1z_1$ est tourné autour de l'axe x_1 (parallèle à l'axe x) par rapport au système xyz en sens inverse des aiguilles d'une montre si la rotation est observée du côté de la partie positive de l'axe x_1 ou de l'axe x. Par ailleurs, désignons par β_1 l'angle de rotation du boîtier du premier gyroscope par rapport à son anneau de

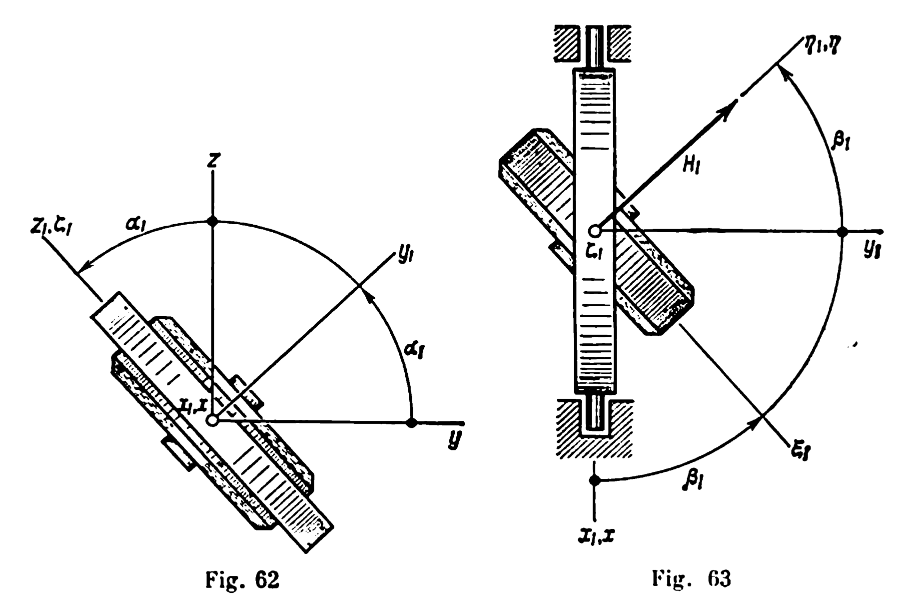


Fig. 62 Fig. 63

cardan extérieur (fig. 63). Posons que pour $\beta_1 > 0$ le système de coordonnées $\xi_1\eta_1\zeta_1$ (lié au boîtier du premier gyroscope) est tourné en sens inverse des aiguilles d'une montre par rapport au système $x_1y_1z_1$ (lié à l'anneau extérieur du premier gyroscope) si on les regarde du côté de la partie positive de l'axe ζ_1 (constamment confondu avec l'axe z_1). Pour $\beta_1 = 0$, les axes ξ_1 et η_1 coïncident respectivement avec les axes x_1 et y_1. Introduisons encore un angle γ_1 (fig. 64) dont est tourné dans le cas général le système $\xi_1\eta_1\zeta_1$ (lié au boîtier du premier gyroscope) par rapport au système $\xi\eta\zeta$, l'axe de rotation étant η_1 (qui est par hypothèse, parallèle à l'axe η pendant toute la durée du mouvement du mobile), c'est-à-dire l'axe qui porte le vecteur moment cinétique propre H_1 du premier gyroscope. Posons que l'angle γ_1 est positif si le système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ semble être tourné par rapport au système $\xi_1\eta_1\zeta_1$ en sens inverse des aiguilles d'une montre, lorsque cette rotation est observée du côté de la partie positive de l'axe η_1 ou, ce qui revient au même, de l'axe η.

Introduisons maintenant des angles α_2, β_2 et γ_2 analogues aux angles α_1, β_1 et γ_1 mais se rapportant au second gyroscope (v. fig. 61). Pour $\alpha_2 = 0$, les axes x_2, y_2, z_2 sont parallèles aux axes correspon-

dants x, y, z. Si $\alpha_2 > 0$ (fig. 65), le système $x_2y_2z_2$ (lié à l'anneau extérieur de la suspension à la cardan du second gyroscope) est tourné dans le sens des aiguilles d'une montre par rapport au système xyz (lié au mobile), lorsque la rotation est observée du côté de la partie positive de l'axe y_2 parallèle à l'axe y. Pour $\beta_2 > 0$ (fig. 66), le système $\xi_2\eta_2\zeta_2$ (lié au boîtier du second gyroscope) est tourné par rapport au système $x_2y_2z_2$ (lié à l'anneau de cardan extérieur du même gyroscope) dans le sens des aiguilles d'une montre, lorsque cette rotation est observée du côté de la partie positive de l'axe ζ_2 constamment confondu avec l'axe z_2. Si $\beta_2 = 0$, l'axe ξ_2 se confond avec l'axe x_2, et l'axe η_2 avec l'axe y_2. Enfin, l'angle γ_2 (fig. 67) est l'angle de rotation du système $\xi_2\eta_2\zeta_2$, lié au boîtier, autour de l'axe ξ_2 (ξ) (c'est-à-dire autour du vecteur moment cinétique propre H_2 du second gyroscope) par rapport au système non tournant $\xi\eta\zeta$. Pour $\gamma_2 = 0$, les axes correspondants des systèmes $\xi_2\eta_2\zeta_2$ et $\xi\eta\zeta$ sont

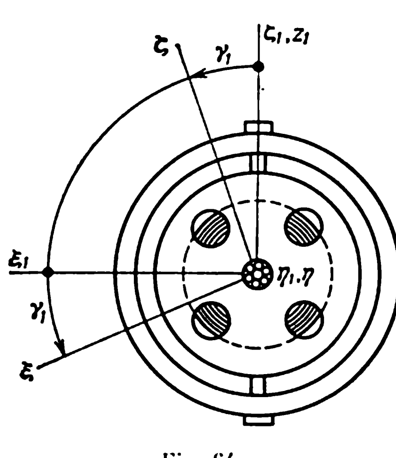


Fig. 64

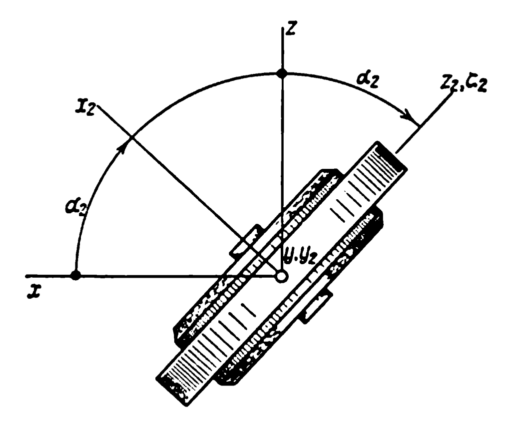


Fig. 65

confondus, et pour $\gamma_2 > 0$, le système $\xi\eta\zeta$ semble être tourné dans le sens des aiguilles d'une montre par rapport au système $\xi_2\eta_2\zeta_2$ si on les regarde du côté de la partie positive de l'axe ξ_2 ou de l'axe ξ (qui lui est parallèle par hypothèse).

L'orientation du mobile ou, ce qui revient au même, du système xyz qui lui est lié, par rapport au système d'orientation fixe $\xi\eta\zeta$ (fig. 68) sera déterminée par les angles suivants: l'angle θ que fait l'axe longitudinal z du mobile avec le plan $\xi\eta$, l'angle ψ formé par la droite η', c'est-à-dire la projection de l'axe z sur ce plan, avec l'axe η et enfin l'angle φ que font entre eux l'axe y et le plan ζz contenant l'axe ζ, l'axe longitudinal z du mobile et la droite η'.

On dira que l'angle θ est le *tangage* du mobile, et que les angles ψ et φ sont respectivement l'*angle de lacet* et l'*angle de rotation*. Dans

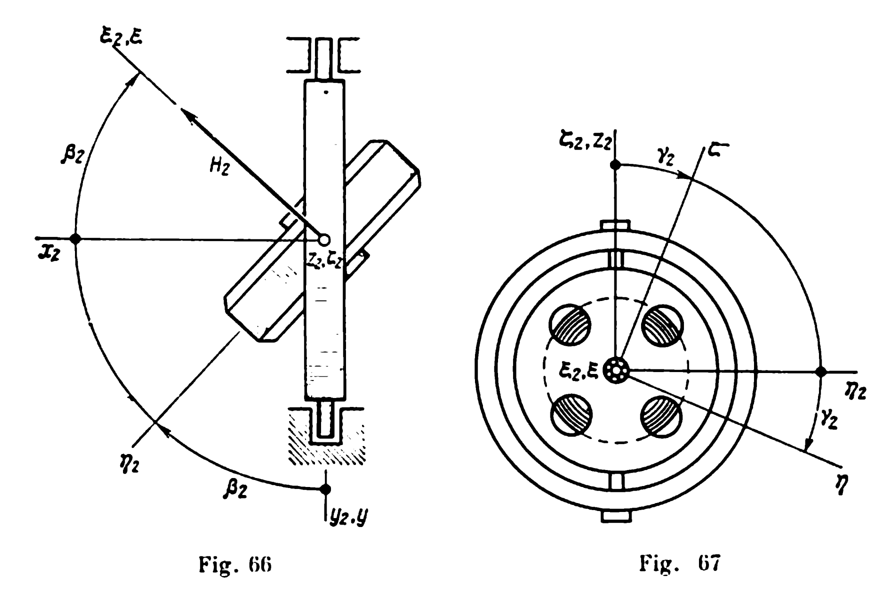


Fig. 66 Fig. 67

ce qui suit, nous nous proposons de représenter les angles θ, ψ et φ sous forme des fonctions de trois quelconques des quatre angles α_1, β_1, α_2, β_2.

Pour résoudre ce problème, composons trois variantes de la même table des cosinus des angles que font entre eux les axes du système de coordonnées non tournant $\xi\eta\zeta$ et du système de coordonnées xyz lié au mobile, en utilisant à cet effet une première fois l'ensemble des angles α_1, β_1, γ_1, une deuxième fois l'ensemble des angles α_2, β_2, γ_2 et enfin une troisième fois l'ensemble des angles θ, ψ et φ. La comparaison des expressions pour les mêmes cosinus représentés différemment dans les variantes mentionnées de la table permet d'obtenir, après quelques calculs supplémentaires, toutes les relations nécessaires contenant les angles cherchés θ, ψ et φ.

Pour obtenir la table mentionnée sous une forme qui ne contient que les angles α_1, β_1 et γ_1, composons d'abord la table des cosi-

nus des angles formés entre les axes des systèmes $x_1y_1z_1$ et xyz liés respectivement à l'anneau de cardan extérieur du premier gyroscope et au mobile (v. fig. 62). Cette table a la forme suivante:

	x	y	z	
x_1	1	0	0	
y_1	0	$\cos \alpha_1$	$\sin \alpha_1$	(3.4.1)
z_1	0	$-\sin \alpha_1$	$\cos \alpha_1$.	

Puis, composons une table analogue se rapportant aux systèmes

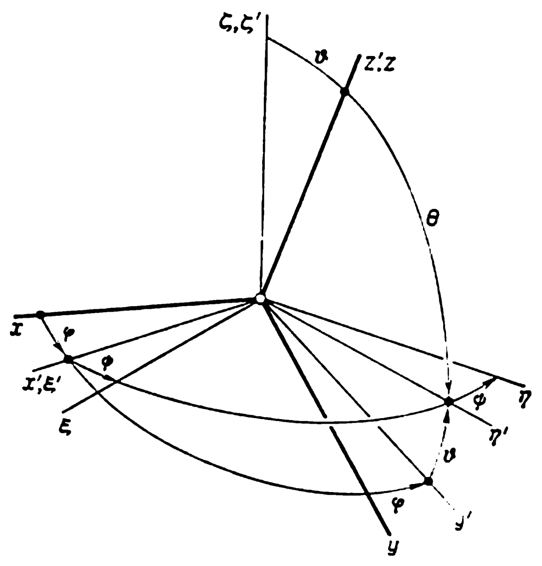


Fig. 68

$x_1y_1z_1$ et $\xi_1\eta_1\zeta_1$ (ce dernier est lié au boîtier du premier gyroscope). Il vient (v. fig. 63)

	x_1	y_1	z_1	
ξ_1	$\cos \beta_1$	$\sin \beta_1$	0	(3.4.2)
η_1	$-\sin \beta_1$	$\cos \beta_1$	0	
ζ_1	0	0	1.	

En faisant usage de ces tables, on obtient la table des cosinus des angles formés entre les axes des systèmes $\xi_1\eta_1\zeta_1$ et xyz:

	x	y	z	
ξ_1	$\cos \beta_1$	$\cos \alpha_1 \sin \beta_1$	$\sin \alpha_1 \sin \beta_1$	(3.4.3)
η_1	$-\sin \beta_1$	$\cos \alpha_1 \cos \beta_1$	$\sin \alpha_1 \cos \beta_1$	
ζ_1	0	$-\sin \alpha_1$	$\cos \alpha_1$.	

Si l'on utilise maintenant, en plus de la dernière table, encore la table

	ξ_1	η_1	ζ_1
ξ	$\cos\gamma_1$	0	$-\sin\gamma_1$
η	0	1	0
ζ	$\sin\gamma_1$	0	$\cos\gamma_1$

(3.4.4)

des cosinus des angles que forment les axes des systèmes $\xi\eta\zeta$ et $\xi_1\eta_1\zeta_1$ (v. fig. 64), on obtient la première variante de la table cherchée :

	x	y	z
ξ	$\cos\beta_1\cos\gamma_1$	$\cos\alpha_1\sin\beta_1\cos\gamma_1 + \sin\alpha_1\sin\gamma_1$	$\sin\alpha_1\sin\beta_1\cos\gamma_1 - \cos\alpha_1\sin\gamma_1$
η	$-\sin\beta_1$	$\cos\alpha_1\cos\beta_1$	$\sin\alpha_1\cos\beta_1$
ζ	$\cos\beta_1\sin\gamma_1$	$\cos\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1 - \sin\alpha_1\cos\gamma_1$	$\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1 + \cos\alpha_1\cos\gamma_1$.

(3.4.5)

Cette table ne comporte que les fonctions trigonométriques des angles α_1, β_1 et γ_1 qui ne se rapportent qu'au premier gyroscope.

Composons maintenant une deuxième variante de la table des cosinus des angles formés entre les axes des systèmes $\xi\eta\zeta$ et xyz en utilisant à cet effet l'ensemble des angles α_2, β_2 et γ_2. Commençons par construire la table des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes de coordonnées xyz (le mobile) et $x_2y_2z_2$ (l'anneau de cardan extérieur du second gyroscope ; v. fig. 65). Elle a la forme suivante :

	x	y	z
x_2	$\cos\alpha_2$	0	$\sin\alpha_2$
y_2	0	1	0
z_2	$-\sin\alpha_2$	0	$\cos\alpha_2$.

(3.4.6)

La table (3.4.6), rapprochée de la table des cosinus des angles (v. fig. 66) formés entre les axes des systèmes $\xi_2\eta_2\zeta_2$ (le boîtier du second gyroscope) et $x_2y_2z_2$ (l'anneau de cardan extérieur du même gyroscope) :

	x_2	y_2	z_2
ξ_2	$\cos\beta_2$	$-\sin\beta_2$	0
η_2	$\sin\beta_2$	$\cos\beta_2$	0
ζ_2	0	0	1

(3.4.7)

donne la table

	x	y	z
ξ_2	$\cos\alpha_2\cos\beta_2$	$-\sin\beta_2$	$\sin\alpha_2\cos\beta_2$
η_2	$\cos\alpha_2\sin\beta_2$	$\cos\beta_2$	$\sin\alpha_2\sin\beta_2$
ζ_2	$-\sin\alpha_2$	0	$\cos\alpha_2$

(3.4.8)

des cosinus des angles formés entre les axes des systèmes $\xi_2\eta_2\zeta_2$ et xyz. Si l'on construit maintenant la table des cosinus se rapportant aux systèmes $\xi\eta\zeta$ et $\xi_2\eta_2\zeta_2$ (v. fig. 67), c'est-à-dire la table

	ξ_2	η_2	ζ_2
ξ	1	0	0
η	0	$\cos\gamma_2$	$-\sin\gamma_2$
ζ	0	$\sin\gamma_2$	$\cos\gamma_2$,

(3.4.9)

on peut obtenir, à partir de ces deux dernières tables, la deuxième variante de la table des cosinus des angles que forment le système xyz lié au mobile et le système d'orientation fixe $\xi\eta\zeta$:

	x	y	z
ξ	$\cos\alpha_2\cos\beta_2$	$-\sin\beta_2$	$\sin\alpha_2\cos\beta_2$
η	$\cos\alpha_2\sin\beta_2\cos\gamma_2 + \sin\alpha_2\sin\gamma_2$	$\cos\beta_2\cos\gamma_2$	$\sin\alpha_2\sin\beta_2\cos\gamma_2 - \cos\alpha_2\sin\gamma_2$
ζ	$\cos\alpha_2\sin\beta_2\sin\gamma_2 - \sin\alpha_2\cos\gamma_2$	$\cos\beta_2\sin\gamma_2$	$\sin\alpha_2\sin\beta_2\sin\gamma_2 + \cos\alpha_2\cos\gamma_2$.

(3.4.10)

Cette table ne contient que des fonctions trigonométriques des variables α_2, β_2, γ_2, c'est-à-dire des angles qui se rapportent seulement au second gyroscope.

Enfin, construisons une troisième variante de la même table en utilisant cette fois uniquement les angles ψ, φ et ϑ (v. fig. 68), ϑ étant l'angle des axes ζ et z. Ce dernier est lié à l'angle θ, introduit précédemment, que l'axe z fait avec le plan $\xi\eta$, c'est-à-dire au tangage du mobile, par la relation évidente

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \theta. \qquad (3.4.11)$$

Introduisons un système de coordonnées auxiliaire $\xi'\eta'\zeta'$ dont l'axe ζ' est parallèle à l'axe ζ et l'axe η' est dirigé suivant la projection de l'axe longitudinal z du mobile sur le plan $\xi\eta$ (fig. 69) et donc fait l'angle ψ (angle de lacet du mobile) avec l'axe η. L'angle ψ sera considéré comme positif si le système $\xi\eta\zeta$ semble être tourné par rapport au système $\xi'\eta'\zeta'$ en sens inverse des aiguilles d'une montre, lorsque la rotation est observée du côté de la partie positive

de l'axe ζ' (ou de l'axe ζ). La table des cosinus des angles que font entre eux les axes de ces systèmes a la forme suivante:

$$\begin{array}{cccc} & \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \eta' & \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \zeta' & 0 & 0 & 1. \end{array} \tag{3.4.12}$$

Introduisons encore un système $x'y'z'$ dont l'axe x' se confond avec l'axe ξ' et l'axe z' est parallèle à l'axe longitudinal z du mobile (fig. 70). L'introduction d'un tel système est toujours possible parce

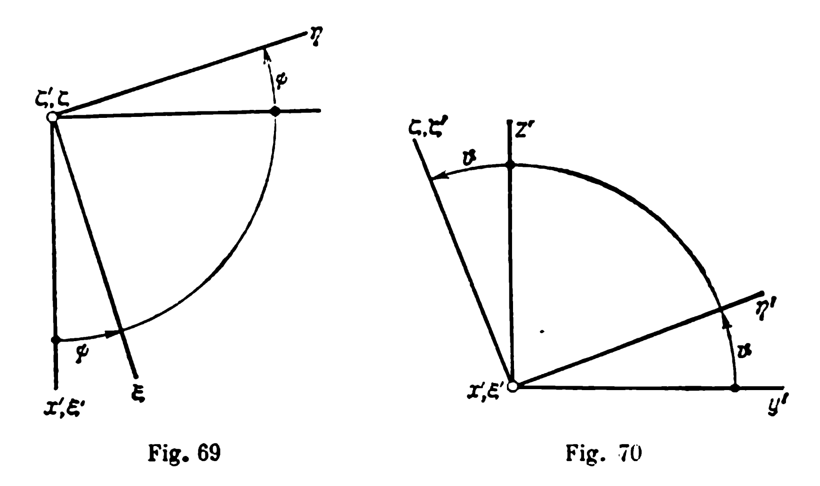


Fig. 69 Fig. 70

que l'axe ξ' est parallèle au plan $\xi\eta$ et en même temps perpendiculaire à la projection η' de l'axe z (z') sur ce plan (v. fig. 68). Les axes ξ' et z sont donc perpendiculaires entre eux, de même que les axes ξ' et z'. Remarquons que tous les six axes ζ', ζ, z, z', η' et y' sont parallèles à un même plan perpendiculaire au plan $\xi\eta$ et que les axes ζ et ζ', ainsi que z et z', sont parallèles l'un à l'autre.

Plus haut, nous avons désigné par ϑ l'angle des axes ζ et z ou, ce qui revient au même, des axes ζ' et z' qui leur sont parallèles (v. fig. 70). Conformément à la formule (3.4.11), l'angle ϑ est positif si le tangage θ est compris dans les limites de $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Dans ce cas, le système $\xi'\eta'\zeta'$ est tourné en sens inverse des aiguilles d'une montre autour de l'axe ξ' (confondu avec l'axe x') par rapport au système $x'y'z'$, si la rotation est observée du côté de la partie positive de l'axe ξ' ou (ce qui revient au même) de l'axe x'. La table des cosinus des angles formés entre les axes des systèmes $x'y'z'$ et

$\xi'\eta'\zeta'$ (v. fig. 70) a la forme suivante:

$$\begin{array}{cccc} & \xi' & \eta' & \zeta' \\ x' & 1 & 0 & 0 \\ y' & 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ z' & 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta. \end{array} \tag{3.4.13}$$

En faisant usage des tables (3.4.12) et (3.4.13), on peut construire la table suivante des cosinus des angles formés entre les axes des systèmes $x'y'z'$ et $\xi\eta\zeta$:

$$\begin{array}{cccc} & \xi & \eta & \zeta \\ x' & \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ y' & \cos\vartheta\sin\psi & \cos\vartheta\cos\psi & -\sin\vartheta \\ z' & \sin\vartheta\sin\psi & \sin\vartheta\cos\psi & \cos\vartheta. \end{array} \tag{3.4.14}$$

Le système $x'y'z'$ est tourné autour de l'axe z', parallèle à l'axe longitudinal z du mobile, de l'angle φ (c'est-à-dire de l'angle de rotation) par rapport à la position dans laquelle les axes x' et y' sont respectivement parallèles aux axes x et y (v. fig. 68). En effet, le plan $y'z'$ étant parallèle aux axes ζ et z (v. fig. 68), l'angle que l'axe y fait avec ce plan est l'angle de rotation introduit plus haut. Ainsi, l'angle de rotation φ est l'angle des axes y' et y. L'angle φ sera considéré comme positif si le système $x'y'z'$ est tourné par rapport au système xyz en sens inverse des aiguilles d'une montre (fig. 71). La table des cosinus des angles formés entre les axes de ces systèmes a la forme suivante:

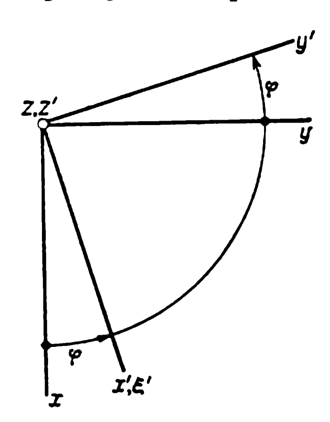


Fig. 71

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ x' & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ y' & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ z' & 0 & 0 & 1. \end{array} \tag{3.4.15}$$

Partant de deux dernières tables, on obtient finalement une troisième variante de la table des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes de coordonnées $\xi\eta\zeta$ et xyz:

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ \xi & -\cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi + & \cos\vartheta\sin\psi\cos\varphi + & \sin\vartheta\sin\psi \\ & +\cos\psi\cos\varphi & +\cos\psi\sin\varphi & \\ \eta & -\cos\vartheta\cos\psi\sin\varphi - & \cos\vartheta\cos\psi\cos\varphi - & \sin\vartheta\cos\psi \\ & -\sin\psi\cos\varphi & -\sin\psi\sin\varphi & \\ \zeta & \sin\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta. \end{array} \tag{3.4.16}$$

L'emploi de gyroscopes ne permet de mesurer que les angles de rotation de leurs anneaux de cardan extérieurs par rapport au mobile et les angles de rotation des boîtiers par rapport aux anneaux extérieurs, c'est-à-dire les angles α_1, α_2, β_1 et β_2. Les angles γ_1 et γ_2 ne sont pas enregistrés par les gyroscopes parce qu'ils ne sont pas des angles de rotation relative des corps articulés quelconques. Il n'est pas difficile de se convaincre que la position du mobile par rapport au système non tournant $\xi\eta\zeta$ est entièrement déterminée par trois quelconques des quatre angles α_1, α_2, β_1 et β_2. Ces angles sont liés par une relation qui est facile à obtenir si l'on compare par exemple, d'après les tables (3.4.5) et (3.4.10), les cosinus des angles faits par l'axe ξ respectivement avec les axes x, y et z. Il en résulte trois égalités suivantes dont chacune est une conséquence de deux autres:

$$\begin{aligned} \cos\beta_1\cos\gamma_1 &= \cos\alpha_2\cos\beta_2, \\ \cos\alpha_1\sin\beta_1\cos\gamma_1+\sin\alpha_1\sin\gamma_1 &= -\sin\beta_2, \\ \sin\alpha_1\sin\beta_1\cos\gamma_1-\cos\alpha_1\sin\gamma_1 &= \sin\alpha_2\cos\beta_2. \end{aligned} \qquad (3.4.17)$$

Multiplions par $\cos\alpha_1$ les deux membres de la deuxième égalité et par $\sin\alpha_1$ les deux membres de la troisième. En additionnant membre à membre les égalités ainsi obtenues, on a

$$\sin\beta_1\cos\gamma_1 = -\sin\beta_2\cos\alpha_1+\sin\alpha_2\cos\beta_2\sin\alpha_1. \qquad (3.4.18)$$

Divisons maintenant membre à membre l'égalité (3.4.18) par la première des égalités (3.4.17). On est conduit finalement à la formule

$$\operatorname{tg}\beta_1 = -\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}\operatorname{tg}\beta_2+\sin\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2, \qquad (3.4.19)$$

qui exprime l'angle β_1 en fonction des angles α_1, α_2 et β_2. C'est la relation cherchée entre les angles α_1, α_2, β_1, β_2. Elle peut se mettre sous une forme symétrique par rapport aux paires de variables α_1 et α_2, β_1 et β_2:

$$\operatorname{tg}\beta_1\cos\alpha_2+\operatorname{tg}\beta_2\cos\alpha_1 = \sin\alpha_1\sin\alpha_2. \qquad (3.4.20)$$

Dans le cas de la fusée V-2, la commande des gouvernails s'effectuait d'après les valeurs enregistrées des angles α_1, α_2 et β_2. Au cours du vol, en l'absence de perturbations, l'axe longitudinal z de la fusée devait rester parallèle au plan $\eta\zeta$ du système d'orientation fixe $\xi\eta\zeta$ introduit au début du présent paragraphe, et le tangage θ devait varier dans le temps suivant un programme prescrit. On réalisait cette dernière opération par l'intermédiaire des gouvernails de la fusée à l'aide du premier gyroscope, en utilisant les données sur l'angle α_1 de rotation de son anneau de cardan extérieur. Ce gyroscope s'appelait gyrohorizon. Le second gyroscope, dit de verticale, commandait, à l'aide de gouvernails, l'angle de lacet ψ

de la fusée et son angle de rotation φ respectivement d'après les données sur les angles α_2 et β_2. Comme on peut s'en assurer facilement à l'aide des formules données plus loin, une commande précise du tangage d'après la valeur de l'angle α_1 ne peut, bien entendu, être réalisée qu'avec un système de commande de la fusée dans lequel les angles α_2 et β_2 et donc les angles ψ et φ s'annulent simultanément. L'angle β_1 de rotation du boîtier du premier gyroscope, c'est-à-dire du gyrohorizon, par rapport à son anneau de cardan extérieur n'était pas utilisé dans le système de commande de la fusée V-2 et de ce fait n'était pas enregistré.

Proposons-nous maintenant de montrer comment on peut trouver les angles ψ, ϑ (donc l'angle θ) et φ qui déterminent l'orientation du mobile par rapport au système non tournant $\xi\eta\zeta$ lorsque les angles α_1, α_2 et β_2 sont connus. De la table (3.4.16) on tire

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\cos(\widehat{\xi, z})}{\cos(\widehat{\eta, z})}. \tag{3.4.21}$$

Prenons maintenant la valeur de $\cos(\widehat{\xi, z})$ donnée par la table (3.4.10) et la valeur de $\cos(\widehat{\eta, z})$ donnée par la table (3.4.5). Il vient

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\sin\alpha_2\cos\beta_2}{\sin\alpha_1\cos\beta_1} = \frac{\sin\alpha_2\cos\beta_2}{\sin\alpha_1}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta_1}. \tag{3.4.22}$$

Si l'on se sert maintenant de la formule (3.4.19), on obtient, après quelques transformations simples, l'expression

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\sin\alpha_1}\sqrt{(\cos\alpha_2\cos\beta_2)^2 + (\sin\beta_2\cos\alpha_1 - \sin\alpha_2\cos\beta_2\sin\alpha_1)^2}, \tag{3.4.23}$$

si bien que le problème de la détermination de l'angle ψ peut être considéré comme résolu.

Envisageons quelques cas particuliers de l'égalité (3.4.23). Si $\alpha_1 = 0$, on a $\psi = \pm\pi/2$, quelle que soit la valeur non nulle de α_2. Dans ce cas, l'axe ζ_1 du boîtier du premier gyroscope, de même que l'axe z_1 du système $x_1y_1z_1$ lié à l'anneau de cardan extérieur et confondu avec ζ_1 sont parallèles à l'axe longitudinal z du mobile (v. fig. 61 et 62). L'axe ζ_1 est perpendiculaire à l'axe η_1 qui, par hypothèse, reste pendant toute la durée de mouvement du mobile parallèle à l'axe η du système d'orientation fixe $\xi\eta\zeta$ (v. fig. 63). Par suite, lorsque $\alpha_1 = 0$, l'axe longitudinal z du mobile est aussi perpendiculaire à l'axe η. Il en est de même pour la projection de l'axe z sur le plan $\xi\eta$, d'où il résulte immédiatement que l'angle de lacet ψ est égal à $\pi/2$ au signe près (v. fig. 68).

Considérons un autre cas extrême, à savoir celui où $\alpha_1 = \pi/2$. L'égalité (3.4.23) donne maintenant

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \alpha_2 \cos \beta_2. \qquad (3.4.24)$$

Cette dernière formule peut s'obtenir également à partir des considérations purement géométriques. En effet, si $\alpha_1 = \pi/2$, l'axe ζ_1 du boîtier du premier gyroscope (ou, ce qui revient au même, l'axe z_1) et l'axe y du système xyz lié au mobile deviennent parallèles et de

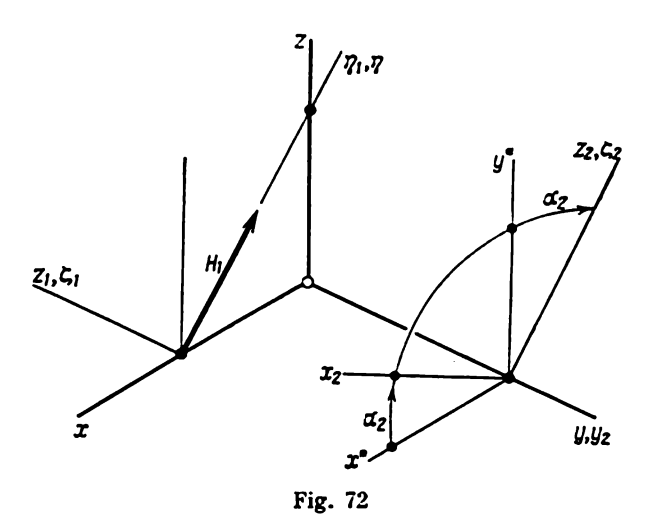


Fig. 72

sens contraires (fig. 72). Il en résulte que l'axe η_1 qui est perpendiculaire à l'axe ζ_1, ainsi qu'à l'axe z_1 est aussi perpendiculaire à l'axe y, autrement dit parallèle au plan xz (v. fig. 72). Or, par hypothèse, l'axe η_1, c'est-à-dire l'axe du rotor du premier gyroscope, est invariablement parallèle à l'axe η du système $\xi\eta\zeta$. Il s'ensuit (v. fig. 72) que, lorsque $\alpha_1 = \pi/2$, l'axe η est perpendiculaire à l'axe y et donc, parallèle au plan xz. D'autre part, le plan x_2z_2 du système $x_2y_2z_2$ lié au boîtier du second gyroscope est, pour toute valeur de l'angle α_2, parallèle au plan xz (v. fig. 65), car les axes y_2 et y sont toujours parallèles. Aussi, lorsque $\alpha_1 = \pi/2$, l'axe η est-il parallèle au plan x_2z_2.

L'axe ξ_2 du rotor du second gyroscope est perpendiculaire au plan $\eta_2\zeta_2$ et de plus, par hypothèse, il est constamment parallèle à l'axe ξ du système non tournant $\xi\eta\zeta$. Par conséquent, les plans $\eta\zeta$ et $\eta_2\zeta_2$ sont parallèles, et, en particulier, l'axe η est parallèle au plan $\eta_2\zeta_2$. Or, comme il vient d'être démontré, le même axe η est parallèle au plan x_2z_2. Il s'ensuit que l'axe η est parallèle à la droite suivant laquelle se coupent les plans $\eta_2\zeta_2$ et x_2z_2. Celle-ci est l'axe ζ_2 qui se

confond avec l'axe z_2 (fig. 73). Ainsi, nous avons démontré que pour $\alpha_1 = \pi/2$ l'axe η est parallèle à l'axe ζ_2 (v. fig. 73). D'autre part, l'axe ξ étant, par hypothèse, toujours parallèle à l'axe ξ_2 (dirigé suivant le vecteur moment cinétique propre du second gyroscope), les plans $\xi\eta$ et $\xi\zeta_2$ sont parallèles. L'axe z_2 et l'axe ζ_2 qui se confondent (v. fig. 65 et 72) font avec le plan yz l'angle α_2. Par conséquent, l'axe η et l'axe ζ_2 (z_2) qui lui est parallèle font le même angle avec l'axe z.

Les plans $\xi_2\zeta_2$ et $x_2\zeta_2$ (c'est-à-dire x_2z_2) forment un dièdre (v. fig. 66) qui se mesure par l'angle plan β_2 que font entre eux les axes ξ_2 et x_2 dont chacun est perpendiculaire à l'axe ζ_2. Menons dans le plan x_2z_2 un axe z^* (v. fig. 72 et 73) parallèle à l'axe z et passant par l'origine du système de coordonnées $x_2y_2z_2$. Construisons maintenant un plan passant par l'axe z^* et perpendiculaire au plan $\xi_2\zeta_2$ et désignons par p la droite d'intersection de ces plans (v. fig. 73). Il est évident que la droite p est la projection de l'axe z^* sur le plan $\zeta_2\xi_2$. D'autre part, les plans $\xi\eta$ et $\zeta_2\xi_2$ étant parallèles, d'après ce qui a été démontré plus haut, la projection de l'axe z sur le plan $\xi\eta$ est parallèle à la droite p et fait avec l'axe η le même angle que celui formé entre la droite p et l'axe ζ_2 (z_2) parallèle à l'axe η. Or, l'angle formé par l'axe η avec la projection de l'axe z sur le plan $\xi\eta$ est, par définition, l'angle de lacet ψ du mobile, c'est-à-dire l'un des trois angles (ψ, ϑ et φ) qui caractérisent la position du mobile par rapport au système $\xi\eta\zeta$. Par conséquent, l'angle que la droite p fait avec l'axe ζ_2 est, lui aussi, égal à ψ.

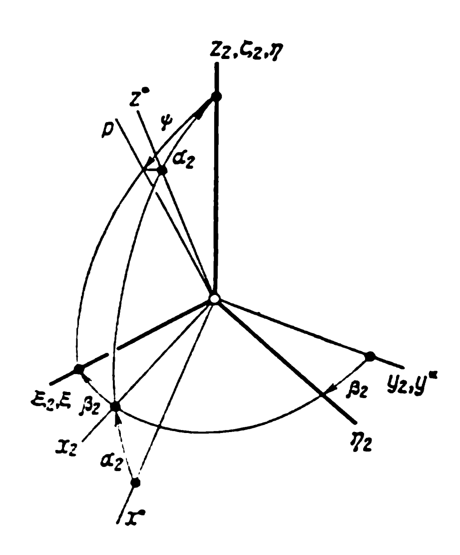


Fig. 73

Ainsi, les plans $p\zeta_2$ et $z^*\zeta_2$ forment un dièdre β_2, et les plans z^*p et $p\zeta_2$ sont perpendiculaires. L'angle des axes z^* et ζ_2 est égal à α_2, alors que l'angle formé par la droite p avec l'axe ζ_2 est égal à ψ (fig. 73 et 74). Ceci étant établi, la formule (3.4.24) découle directement à partir d'une construction stéréométrique simple (v. fig. 74) ou, si l'on préfère, de l'emploi des formules de la trigonométrie sphérique.

Si, de plus, on pose dans la formule (3.4.24) $\beta_2 = 0$, on obtient

$$\psi = \alpha_2. \tag{3.4.25}$$

Cette égalité peut encore être obtenue directement (v. fig. 73). Il a été démontré plus haut que pour $\alpha_1 = \pi/2$ l'axe η est parallèle à l'axe z_2 qui se confond avec l'axe ζ_2. Dans le cas où $\beta_2 = 0$, les axes x_2, y_2, z_2 liés à l'anneau de cardan extérieur du second gyroscope se confondent respectivement avec les axes ξ_2, η_2, ζ_2 liés à son boîtier (v. fig. 66 et 73). Par conséquent, l'axe ξ qui est, par hypothèse, constamment parallèle à l'axe ξ_2, est dans ce cas perpendiculaire à l'axe y_2 (qui se confond avec l'axe η_2 lorsque $\beta_2 = 0$). L'axe y_2 étant

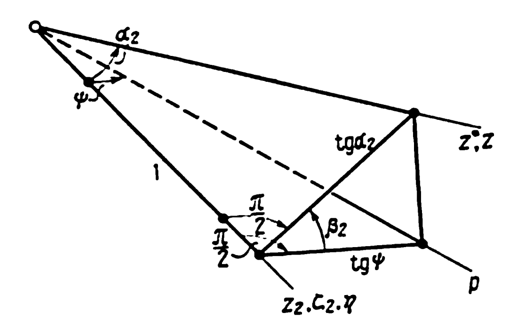


Fig. 74

parallèle à l'axe y du système xyz lié au mobile, les axes η et ξ sont perpendiculaires à l'axe y et donc l'axe z qui est certes, lui aussi, perpendiculaire à l'axe y, est parallèle au plan $\xi\eta$. De ce fait, l'axe z est parallèle à sa projection p sur le même plan $\xi\eta$ (v. fig. 73). Quant à l'angle que cette projection fait avec l'axe η, il est, par définition, l'angle de lacet ψ du mobile. Ainsi, dans le cas considéré, l'angle ψ est égal à l'angle des axes z et η ou des axes z et z_2 car les axes η et z_2 sont parallèles, comme il a été démontré plus haut. Ce dernier angle est précisément l'angle α_2 de rotation de l'anneau de cardan extérieur du second gyroscope et du système $x_2y_2z_2$ qui lui est lié, par rapport au système xyz lié au mobile.

Proposons-nous maintenant de calculer l'angle ϑ. A cet effet, comparons de nouveau les cosinus des angles faits par l'axe z avec les axes ξ et η, c'est-à-dire $\cos(\widehat{\xi, z})$ et $\cos(\widehat{\eta, z})$, en faisant usage des tables (3.4.5), (3.4.10) et (3.4.16). On a

$$\begin{aligned} \sin\vartheta \sin\psi &= \sin\alpha_2 \cos\beta_2, \\ \sin\vartheta \cos\psi &= \sin\alpha_1 \cos\beta_1, \end{aligned} \qquad (3.4.26)$$

d'où, après quelques calculs simples, on tire la formule

$$\sin\vartheta = \sqrt{\sin^2\alpha_1 \cos^2\beta_1 + \sin^2\alpha_2 \cos^2\beta_2} \qquad (3.4.27)$$

qui résout le problème de la détermination de l'angle ϑ en fonction des valeurs données des angles α_1, α_2 et β_2, après avoir calculé au préalable l'angle β_1 par la formule (3.4.19). Remarquons que la formule (3.4.27) ne change pas sa forme, lorsque les angles α_1 et β_1 sont remplacés respectivement par α_2 et β_2 et ces derniers par α_1 et β_1, comme il fallait s'y attendre par raison de symétrie. Dans un cas particulier où les angles α_2 et β_2 sont simultanément nuls, la formule (3.4.19) donne $\beta_1 = 0$. Compte tenu de cette circonstance, ainsi que de la formule (3.4.27), on constate que pour $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ est vérifiée l'égalité $\vartheta = \alpha_1$, et donc le tangage du mobile est entièrement déterminé par l'angle de rotation de l'anneau de cardan extérieur du premier gyroscope, c'est-à-dire du gyrohorizon, par rapport à son boîtier.

Enfin, passons au calcul de l'angle de rotation φ du mobile. En comparant les cosinus des angles formés entre les axes ζ et x dans les tables (3.4.5) et (3.4.16) et entre les axes ζ et y dans les tables (3.4.10) et (3.4.16), on obtient les égalités

$$\begin{aligned} \sin\vartheta \sin\varphi &= \cos\beta_1 \sin\gamma_1, \\ -\sin\vartheta \cos\varphi &= \cos\beta_2 \sin\gamma_2. \end{aligned} \tag{3.4.28}$$

Pour pouvoir utiliser l'une ou l'autre de ces égalités, il faut au préalable représenter $\sin\gamma_1$ et $\sin\gamma_2$ par l'intermédiaire des fonctions trigonométriques des angles α_1, β_1, α_2, β_2. A cet effet, comparons d'abord les cosinus des angles formés entre les axes ξ et y, ainsi qu'entre les axes ξ et z dans les tables (3.4.5) et (3.4.10). On obtient deux relations:

$$\begin{aligned} \cos\alpha_1 \sin\beta_1 \cos\gamma_1 + \sin\alpha_1 \sin\gamma_1 &= -\sin\beta_2, \\ \sin\alpha_1 \sin\beta_1 \cos\gamma_1 - \cos\alpha_1 \sin\gamma_1 &= \sin\alpha_2 \cos\beta_2. \end{aligned} \tag{3.4.29}$$

En multipliant par $\sin\alpha_1$ les deux membres de la première relation et par $-\cos\alpha_1$ les deux membres de la seconde, on obtient après l'addition, la formule suivante

$$\sin\gamma_1 = -\sin\beta_2 \sin\alpha_1 - \sin\alpha_2 \cos\beta_2 \cos\alpha_1. \tag{3.4.30}$$

D'une manière analogue, si l'on prend de nouveau les cosinus des angles faits par l'axe η avec les axes x et z, donnés par la table (3.4.5) et on les égale respectivement aux mêmes cosinus donnés par la table (3.4.10), on obtient encore deux relations:

$$\begin{aligned} -\sin\beta_1 &= \cos\alpha_2 \sin\beta_2 \cos\gamma_2 + \sin\alpha_2 \sin\gamma_2, \\ \sin\alpha_1 \cos\beta_1 &= \sin\alpha_2 \sin\beta_2 \cos\gamma_2 - \cos\alpha_2 \sin\gamma_2. \end{aligned} \tag{3.4.31}$$

Multiplions les deux membres de la première de ces relations par $\sin\alpha_2$ et les deux membres de la seconde par $-\cos\alpha_2$. Après avoir

additionné les produits obtenus on a encore une formule:

$$\sin \gamma_2 = -\sin \beta_1 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \cos \beta_1 \cos \alpha_2. \qquad (3.4.32)$$

En utilisant les formules (3.4.30) et (3.4.32) dans les égalités (3.4.28), on obtient:

$$\begin{aligned} \sin \vartheta \sin \varphi &= -\cos \beta_1 (\sin \beta_2 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cos \beta_2 \cos \alpha_1), \\ \sin \vartheta \cos \varphi &= \cos \beta_2 (\sin \beta_1 \sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos \beta_1 \cos \alpha_2). \end{aligned} \qquad (3.4.33)$$

Chacune de ces égalités [1]) peut être utilisée pour déterminer l'angle φ, si l'on calcule au préalable, à l'aide de la formule (3.4.27), l'angle ϑ. La première des relations (3.4.33) est spécialement commode pour la détermination de l'angle φ d'après trois angles α_1, α_2 et β_2. Compte tenu de la formule (3.4.27), on obtient

$$\sin \varphi = -\frac{\cos \beta_1 (\sin \beta_2 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cos \beta_2 \cos \alpha_1)}{\sqrt{\sin^2 \alpha_1 \cos^2 \beta_1 + \sin^2 \alpha_2 \cos^2 \beta_2}}. \qquad (3.4.34)$$

Si l'on utilise maintenant l'égalité (3.4.19) et l'on fait disparaître l'angle β_1 dans la dernière formule, on obtient finalement l'expression suivante:

$$\sin \varphi = \\ = -\frac{\sin \alpha_1 \sin \beta_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \beta_2}{\sqrt{\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 \cos^2 \beta_2 + \mathrm{tg}^2 \alpha_2 (\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \beta_2 - \cos \alpha_1 \sin \beta_2)^2}}. \qquad (3.4.35)$$

§ 5. Méthode générale de composition des tables des cosinus des angles formés par les axes des systèmes de coordonnées

En examinant le contenu des paragraphes constituant ce chapitre et les chapitres précédents, il est aisé de constater que la composition des tables des cosinus des angles que forment les axes de divers systèmes de coordonnées y tient beaucoup de place. Le plus souvent, le côté analytique de la résolution d'un problème concret consistait à comparer des tables composées de différentes façons et se rapportant aux mêmes systèmes. Il est donc d'une importance incontestable de simplifier autant que possible le processus de composition de telles tables pour éviter des opérations nombreuses et fastidieuses dont l'exécution exacte exige une grande attention.

---

[1]) Il est aisé de voir que les égalités (3.4.33), ainsi que les formules (3.4.26), sont également symétriques par rapport à la permutation des paires de variables α_1, β_1, et α_2, β_2, à condition de changer simultanément les angles φ et ψ par $\pi/2 - \varphi$ et $\pi/2 - \psi$. La cause en est la symétrie de montage des gyroscopes à bord du mobile par rapport au plan bissecteur du dièdre formé par les plans xz et yz.

Soient deux systèmes de coordonnées quelconques (en particulier, ceux dont les axes forment des angles cherchés). Il est toujours possible de les interpréter comme deux positions, l'une de départ et l'autre d'arrivée, d'un même trièdre effectuant, dans un ordre déterminé, des rotations finies autour de ses arêtes. Si le trièdre susmentionné effectue l'une après l'autre trois rotations finies autour de chacune de ses arêtes, il n'existe, comme il sera montré plus loin, que deux suites essentiellement différentes de telles rotations. Par conséquent, il suffit dans ce cas de composer, une fois pour toutes,

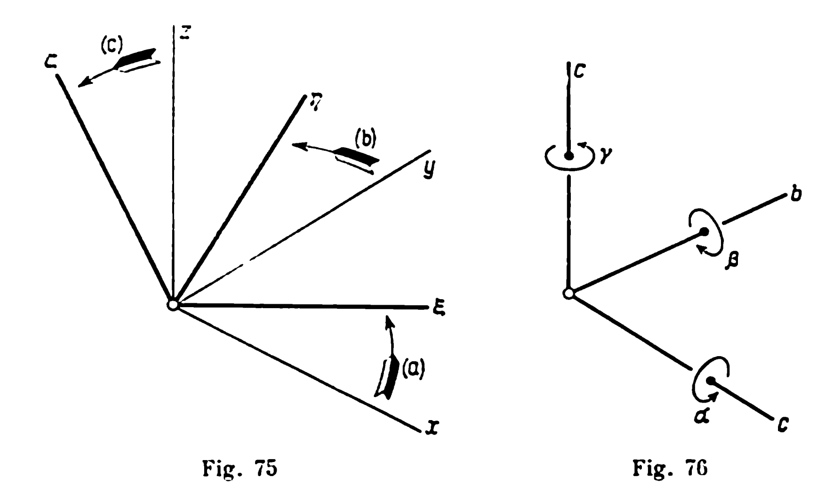


Fig. 75 Fig. 76

deux tables, essentiellement différentes l'une de l'autre, des cosinus des angles que font entre elles les directions des arêtes du trièdre dans ses positions de départ et d'arrivée.

Notons a, b, c les arêtes d'un trièdre mobile. Soient x, y, z les directions que ces arêtes ont en position de départ et désignons par les lettres ξ_1, η_1, ζ_1 et par ξ_2, η_2, ζ_2 leurs directions en positions d'arrivée correspondant aux deux suites possibles de rotations. Admettons que les directions x, y, z des arêtes a, b, c constituent un trièdre direct xyz (fig. 75). Alors les directions ξ_1, η_1, ζ_1 et ξ_2, η_2, ζ_2 forment, elles aussi, des trièdres directs. On appelle *déplacement angulaire de première espèce* le déplacement du trièdre abc de la position xyz dans la position $\xi_1\eta_1\zeta_1$, par suite des rotations successives: d'angle α_1 autour de l'arête a, d'angle β_1 autour de l'arête b et enfin, d'angle γ_1 autour de l'arête c. Aux valeurs positives des angles α_1, β_1 et γ_1 (*angles d'Euler-Krylov*, v. paragraphe suivant) correspondent, ici et plus loin, les rotations du trièdre abc en sens inverse des aiguilles d'une montre autour des arêtes a, b et c si l'on regarde le sommet du trièdre du côté de ces arêtes (fig. 76).

Nous appellerons *déplacement angulaire de deuxième espèce* le déplacement du trièdre *abc* de la position *xyz* dans la position $\xi_2\eta_2\zeta_2$ par suite des rotations successives d'abord d'angle β_2 autour de l'arête *b*, ensuite d'angle α_2 autour de l'arête *a* et enfin, d'angle γ_2 autour de l'arête *c*. Les sens des rotations correspondant aux valeurs positives des angles α_2, β_2 et γ_2 se déterminent exactement de la

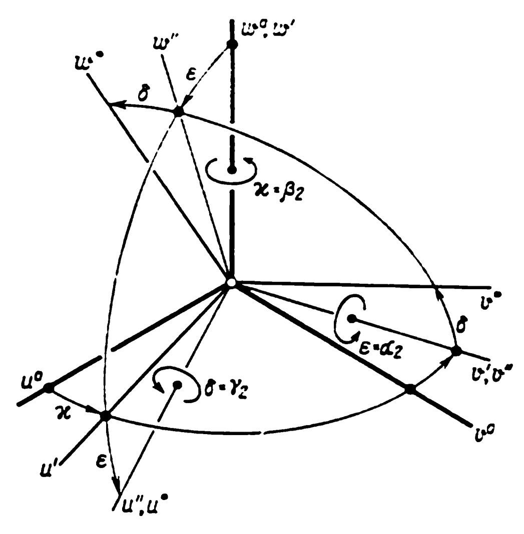


Fig. 77

même façon que dans le cas des angles α_1, β_1 et γ_1. Tout autre déplacement du trièdre *abc*, résultant de trois rotations finies successives autour de chacune de ses arêtes se ramène à l'un ou à l'autre des déplacements angulaires décrits plus haut. Il faut seulement désigner, d'une façon appropriée, par *a*, *b* et *c* les arêtes du trièdre et par α_1, β_1, γ_1 ou α_2, β_2, γ_2 les angles de rotations finies respectives autour de chacune d'elles. Dans ces conditions, c'est l'ordre de deux premières rotations qu'il suffit de considérer puisque, dans les deux cas, on peut toujours admettre que la troisième rotation est la dernière à effectuer de l'angle γ_1 ou de l'angle γ_2 autour de l'arête *c*.

Soit donné par exemple un trièdre direct *uvw*. Supposons qu'il se déplace de la position $u^0v^0w^0$ (fig. 77) dans la position $u^*v^*w^*$ en effectuant une rotation d'angle $\varkappa$ autour de l'arête *w* (ou, ce qui revient au même, autour de l'axe w^0), puis d'angle ε autour de l'arête *v* (qui a pris par suite de la rotation précédente une position v') et enfin, d'angle δ autour de l'arête *u* (qui se confond, après les deux premières rotations, avec l'axe u^*). Désignons l'arête *v* par la lettre *a*, l'arête *w* par la lettre *b* et l'arête *u* par la lettre *c* et posons respective-

ment

$$\varepsilon = \alpha_2, \quad \varkappa = \beta_2, \quad \delta = \gamma_2. \tag{3.5.1}$$

Ceci étant, le trièdre *abc* est aussi un trièdre direct. Vu que la suite des arêtes autour desquelles sont effectuées les rotations finies se présente maintenant sous la forme de *b*, *a*, *c*, on est dans ce cas en présence d'un déplacement angulaire de deuxième espèce.

Remarquons qu'une rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, déterminée par les angles classiques d'Euler ψ, θ et φ (fig. 78) n'appartient pas à la classe des déplacements considérés. En effet, ce

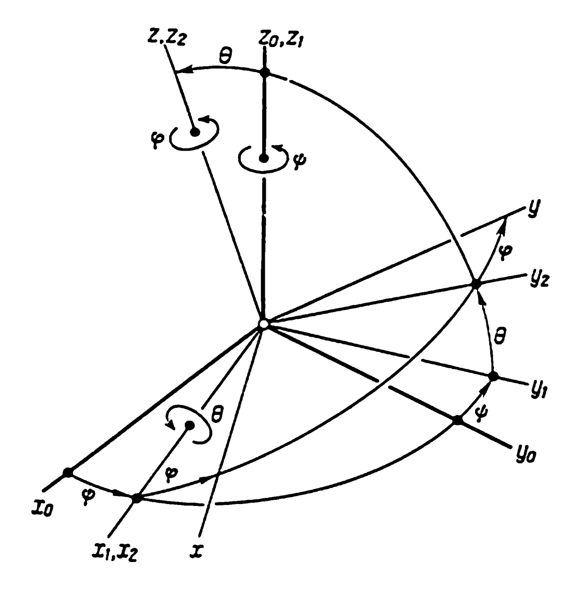


Fig. 78

déplacement se compose de rotations successives suivantes du trièdre *abc* dont les arêtes se confondent, en position de départ, respectivement avec les axes x_0, y_0 et z_0. Tout d'abord, le trièdre tourne de l'angle ψ autour de l'arête *c* confondue avec l'axe z_0, ensuite de l'angle θ autour de l'arête *a* qui a pris une nouvelle position ou, ce qui revient au même, autour de la ligne des nœuds x_1 (fig. 78) et enfin de l'angle φ autour de l'arête *c* qui se confond maintenant avec l'axe *z* du système de coordonnées *xyz* correspondant à la position d'arrivée du trièdre *abc*. Ainsi, comme on le voit, il n'y a pas ici de trois rotations successives autour de chacune des arêtes du trièdre *abc*. La présence de deux rotations finies autour d'une même arête rend peu commode l'emploi du système des angles classiques d'Euler pour l'étude de petits déplacements angulaires d'un corps solide. La

raison en est qu'à de tels déplacements correspondent, dans le cas général, de grandes valeurs (et non petites) des angles ψ et φ, qui diffèrent d'ailleurs très peu l'une de l'autre (voir tome II, chap. II).

Construisons maintenant, par la méthode habituelle, les tables des cosinus des angles formés entre les axes des systèmes xyz et $\xi_1\eta_1\zeta_1$, ainsi qu'entre les axes des systèmes xyz et $\xi_2\eta_2\zeta_2$, correspondant aux positions de départ et d'arrivée du trièdre abc qui effectue un déplacement soit de première, soit de deuxième espèce.

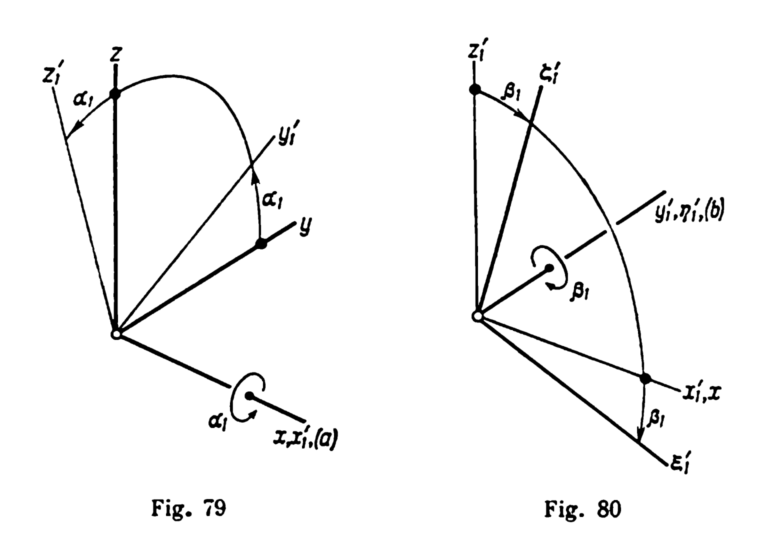


Fig. 79 Fig. 80

Si le déplacement est de première espèce, le trièdre tourne d'abord de l'angle α_1 autour de l'arête a (confondue avec l'axe x). Cette rotation fait passer le trièdre abc de la position xyz dans une position qui sera désignée par $x_1'y_1'z_1'$ (fig. 79). La table correspondante des cosinus des angles formés par les axes des systèmes $x_1'y_1'z_1'$ et xyz a la forme suivante:

	x	y	z
x_1'	1	0	0 ·
y_1'	0	$\cos\alpha_1$	$\sin\alpha_1$
z_1'	0	$-\sin\alpha_1$	$\cos\alpha_1$.

(3.5.2)

La rotation suivante se fait de l'angle β_1 autour de l'arête b (qui se confond maintenant avec l'axe y_1'). Il en résulte le passage du trièdre abc de la position $x_1'y_1'z_1'$ dans la position $\xi_1'\eta_1'\zeta_1'$ (fig. 80). A cette rotation correspond la table suivante des cosinus des angles formés

entre les axes des systèmes $\xi_1'\eta_1'\zeta_1'$ et $x_1'y_1'z_1'$:

	x_1'	y_1'	z_1'
ξ_1'	$\cos\beta_1$	0	$-\sin\beta_1$
η_1'	0	1	0
ζ_1'	$\sin\beta_1$	0	$\cos\beta_1$.

(3.5.3)

En partant des tables (3.5.2) et (3.5.3), on peut maintenant construire la table des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes $\xi_1'\eta_1'\zeta_1'$ et xyz:

	x	y	z
ξ_1'	$\cos\beta_1$	$\sin\alpha_1\sin\beta_1$	$-\cos\alpha_1\sin\beta_1$
η_1'	0	$\cos\alpha_1$	$\sin\alpha_1$
ζ_1'	$\sin\beta_1$	$-\sin\alpha_1\cos\beta_1$	$\cos\alpha_1\cos\beta_1$.

(3.5.4)

A la dernière rotation du trièdre *abc*, c'est-à-dire à la rotation d'angle γ_1 autour de l'arête c (qui se confond, après deux rotations précédentes, avec l'axe ζ_1' ou, ce qui revient au même, avec l'axe ζ_1), correspond le passage du trièdre de la position $\xi_1'\eta_1'\zeta_1'$ dans la position d'arrivée $\xi_1\eta_1\zeta_1$ (fig. 81). La table des cosinus des angles formés entre les axes des systèmes $\xi_1\eta_1\zeta_1$ et $\xi_1'\eta_1'\zeta_1'$ a la forme suivante:

	ξ_1'	η_1'	ζ_1'
ξ_1	$\cos\gamma_1$	$\sin\gamma_1$	0
η_1	$-\sin\gamma_1$	$\cos\gamma_1$	0
ζ_1	0	0	1.

(3.5.5)

En partant des tables (3.5.4) et (3.5.5), construisons la table cherchée des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes $\xi_1\eta_1\zeta_1$ et xyz, laquelle caractérise le déplacement de première espèce, c'est-à-dire l'ensemble de trois rotations successives du trièdre *abc* autour des arêtes *a*, *b* et *c*. Cette table sera appelée *table de première espèce*. Elle a la forme

	x	y	z
ξ_1	$\cos\beta_1\cos\gamma_1$	$\sin\alpha_1\sin\beta_1\cos\gamma_1+$ $+\cos\alpha_1\sin\gamma_1$	$-\cos\alpha_1\sin\beta_1\cos\gamma_1+$ $+\sin\alpha_1\sin\gamma_1$
η_1	$-\cos\beta_1\sin\gamma_1$	$-\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1+$ $+\cos\alpha_1\cos\gamma_1$	$\cos\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1+$ $+\sin\alpha_1\cos\gamma_1$
ζ_1	$\sin\beta_1$	$-\sin\alpha_1\cos\beta_1$	$\cos\alpha_1\cos\beta_1$.

(3.5.6)

Passons maintenant à la construction de la table des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes de coordonnées xyz

et $\xi_2\eta_2\zeta_2$. La table cherchée étant déterminée par un déplacement de deuxième espèce, la première rotation du trièdre *abc* se fait maintenant de l'angle β_2 autour de l'arête y_2' (confondue avec l'axe y de sa position de départ) (fig. 82). Par suite de cette rotation, le trièdre *abc* passe de la position *xyz* dans une autre position qui sera

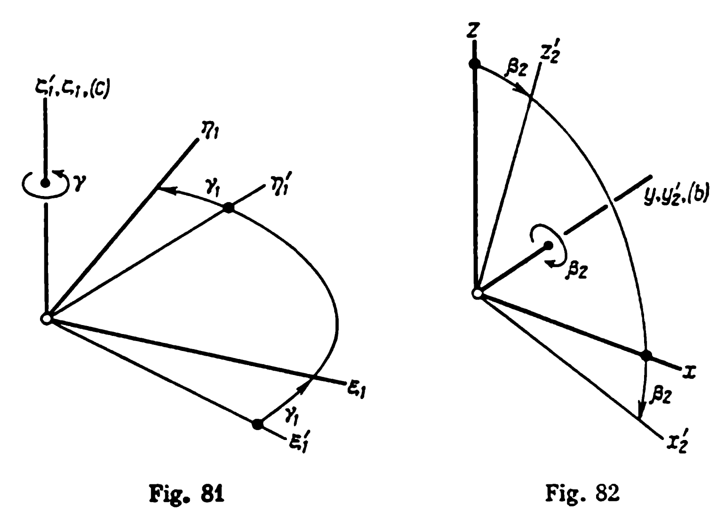


Fig. 81 Fig. 82

désignée par $x_2'y_2'z_2'$. A une telle rotation finie correspond la table des cosinus des angles suivante:

	x	y	z
x_2'	$\cos\beta_2$	0	$-\sin\beta_2$
y_2'	0	1	0
z_2'	$\sin\beta_2$	0	$\cos\beta_2$.

(3.5.7)

La rotation suivante du trièdre *abc* s'effectue de l'angle α_2 autour de l'arête a (qui se confond maintenant avec l'axe x_2'). Il en résulte le passage du trièdre de la position $x_2'y_2'z_2'$ dans une position notée par la suite $\xi_2'\eta_2'\zeta_2'$ (fig. 83). La table des cosinus des angles formés entre les axes des systèmes $\xi_2'\eta_2'\zeta_2'$ et $x_2'y_2'z_2'$ est

	x_2'	y_2'	z_2'
ξ_2'	1	0	0
η_2'	0	$\cos\alpha_2$	$\sin\alpha_2$
ζ_2'	0	$-\sin\alpha_2$	$\cos\alpha_2$.

(3.5.8)

Connaissant les tables (3.5.7) et (3.5.8), on peut construire la table suivante des cosinus des angles formés entre les axes des systèmes

$\xi_2'\eta_2'\zeta_2'$ et xyz:

	x	y	z
ξ_2'	$\cos\beta_2$	0	$-\sin\beta_2$
η_2'	$\sin\alpha_2\sin\beta_2$	$\cos\alpha_2$	$\sin\alpha_2\cos\beta_2$
ζ_2'	$\cos\alpha_2\sin\beta_2$	$-\sin\alpha_2$	$\cos\alpha_2\cos\beta_2$.

(3.5.9)

Par suite de la dernière rotation d'angle γ_2 autour de l'arête c (qui prend après deux rotations précédentes la position ζ_2' confondue avec ζ_2) le trièdre abc passe de la position $\xi_2'\eta_2'\zeta_2'$ dans sa position

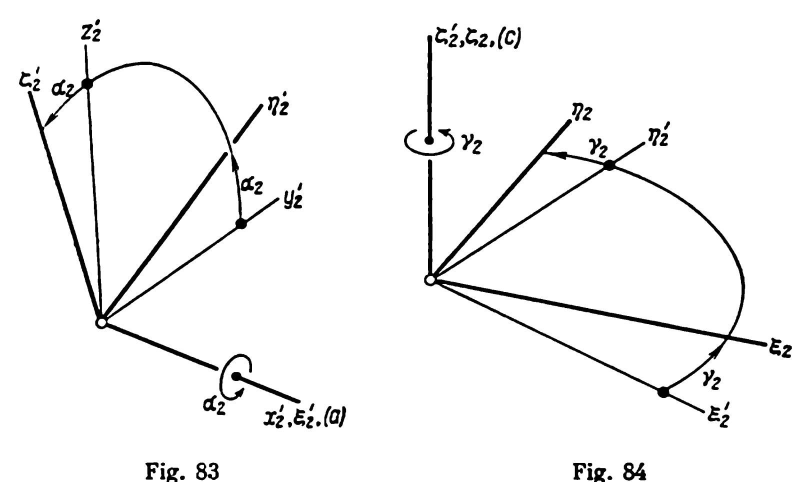


Fig. 83 Fig. 84

d'arrivée $\xi_2\eta_2\zeta_2$ (fig. 84). La table correspondante des cosinus des angles est analogue à la table (3.5.5), donc, est de la forme

	ξ_2'	η_2'	ζ_2'
ξ_2	$\cos\gamma_2$	$\sin\gamma_2$	0
η_2	$-\sin\gamma_2$	$\cos\gamma_2$	0
ζ_2	0	0	1.

(3.5.10)

En se servant des tables (3.5.9) et (3.5.10), on peut enfin construire la table des cosinus des angles formés par les axes des systèmes $\xi_2\eta_2\zeta_2$ et xyz. Il vient

	x	y	z
ξ_2	$\sin\beta_2\sin\alpha_2\sin\gamma_2 + \cos\beta_2\cos\gamma_2$	$\cos\alpha_2\sin\gamma_2$	$\cos\beta_2\sin\alpha_2\sin\gamma_2 - \sin\beta_2\cos\gamma_2$
η_2	$\sin\beta_2\sin\alpha_2\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\sin\gamma_2$	$\cos\alpha_2\cos\gamma_2$	$\cos\beta_2\sin\alpha_2\cos\gamma_2 + \sin\beta_2\sin\gamma_2$
ζ_2	$\sin\beta_2\cos\alpha_2$	$-\sin\alpha_2$	$\cos\beta_2\cos\alpha_2$.

(3.5.11)

Cette dernière table sera appelée *table de deuxième espèce*. Elle caractérise le déplacement angulaire de deuxième espèce du trièdre *abc* de la position xyz dans la position $\xi_2\eta_2\zeta_2$, c'est-à-dire un déplacement qui résulte de trois rotations successives autour des arêtes b, a et c respectivement d'angles β_2, α_2 et γ_2.

En vertu des propriétés que présentent les rotations finies, la position du système $\xi_1\eta_1\zeta_1$ ne coïncide évidemment pas avec la position du système $\xi_2\eta_2\zeta_2$ si, les valeurs des angles α_1 et β_1 étant différentes de zéro, on a

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2. \tag{3.5.12}$$

En effet, il résulte des égalités (3.5.12) et de la comparaison des tables (3.5.6) et (3.5.11) que des éléments correspondants de ces tables ne sont égaux que lorsque les angles α_1 et α_2 s'annulent simultanément pour $\beta_1 = \beta_2$ et $\gamma_1 = \gamma_2$ ou dans le cas où $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$. Dans le cas général, lorsque les conditions (3.5.12) sont réalisées, les éléments correspondants des tables (3.5.6) et (3.5.11) ne sont pas égaux et les positions des systèmes de coordonnées $\xi_1\eta_1\zeta_1$ et $\xi_2\eta_2\zeta_2$ par rapport au système xyz ne se confondent pas. La réciproque est aussi vraie. A savoir, si les axes de même nom des systèmes $\xi_1\eta_1\zeta_1$ et $\xi_2\eta_2\zeta_2$ se confondent, les angles α_1 et α_2, β_1 et β_2, ainsi que les angles γ_1 et γ_2 ne sont pas deux à deux égaux (sauf dans les cas mentionnés plus haut, c'est-à-dire pour $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ou $\beta_1 = \beta_2 = 0$).

Donnons quelques exemples d'application des tables de première et de deuxième espèce. Au chap. I, § 6, nous avons obtenu la table (1.6.4) des cosinus des angles que forment les axes des systèmes $x^0y^0z^0$ et xyz. Le passage du système $x^0y^0z^0$ au système xyz a été réalisé au moyen : 1) d'une rotation d'angle θ dans le sens des aiguilles d'une montre autour de l'axe y^0 confondu avec l'axe y_2, laquelle conduit au système de coordonnées $x_2y_2z_2$ (v. fig. 24) ; 2) d'une rotation d'angle ψ en sens inverse des aiguilles d'une montre autour de l'axe x_2 de ce nouveau système, laquelle transforme $x_2y_2z_2$ en $x_1y_1z_1$ dont l'axe x_1 est confondu avec x_2 et enfin, 3) d'une rotation d'angle $\varkappa$ en sens inverse des aiguilles d'une montre autour de l'axe z_1, qui emmène vers le système xyz. L'axe z de ce dernier se confond avec l'axe intermédiaire z_1 (v. fig. 25).

Si l'on appelle les axes x^0, y^0, z^0 ; x_2, y_2, z_2 ; x_1, y_1, z_1 ; x, y, z respectivement x, y, z ; x_2', y_2', z_2' ; ξ_2', η_2', ζ_2' ; ξ_2, η_2, ζ_2 et que l'on remplace ensuite l'angle θ par $-\beta_2$, l'angle ψ par α_2 et l'angle $\varkappa$ par γ_2, il n'est pas difficile de se convaincre que la suite de rotations indiquée plus haut est un déplacement angulaire de deuxième espèce. En effet, partant de sa position initiale xyz, le trièdre *abc* prendra dans ce cas les positions successives $x_2'y_2'z_2'$, $\xi_2'\eta_2'\zeta_2'$ et enfin, $\xi_2\eta_2\zeta_2$, en tournant d'abord autour de l'arête b de l'angle $\beta_2 = -\theta$, ensuite autour de l'arête a de l'angle $\alpha_2 = \psi$ et enfin, autour de l'arête c

de l'angle $\gamma_2 = \varkappa$. Aussi, pour obtenir tout de suite la table (1.6.4), suffit-il de remplacer dans la table (3.5.11) les angles α_2, β_2, γ_2 respectivement par les angles ψ, $-\theta$ et $\varkappa$ et de donner aux axes x, y, z ; x_2', y_2', z_2' ; $\xi_2', \eta_2', \zeta_2'$; ξ_2, η_2, ζ_2 leurs anciens noms de x^0, y^0, z^0 ; x_2, y_2, z_2 ; x_1, y_1, z_1 ; x, y, z.

Pour l'analyse des déplacements angulaires, il est commode d'introduire une écriture conventionnelle suivante. Relativement au déplacement qui vient d'être considéré et qui correspond à la table (1.6.4) cette écriture est de la forme

$$x^0y^0z^0 \xrightarrow[-\theta]{y^0,\ y_2} x_2y_2z_2 \xrightarrow[\psi]{x_2,\ x_1} x_1y_1z_1 \xrightarrow[\varkappa]{z_1,\ z} xyz. \tag{3.5.13}$$

Ici, la flèche indique le passage du trièdre *abc* d'une position en une autre. Au-dessus de la flèche sont indiqués deux axes confondus autour desquels s'effectue une rotation finie et, au-dessous de la flèche, l'angle de cette rotation. Le signe « moins » signifie dans ce cas que la rotation s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre si on la regarde du côté de la partie positive des axes confondus. Au déplacement angulaire de première espèce considéré dans le présent paragraphe, auquel se rapporte la table (3.5.6), on peut faire correspondre le schéma suivant:

$$xyz \xrightarrow[\alpha_1]{x,\ x_1'} x_1'y_1'z_1' \xrightarrow[\beta_1]{y_1',\ \eta_1'} \xi_1'\eta_1'\zeta_1' \xrightarrow[\gamma_1]{\zeta_1',\ \zeta_1} \xi_1\eta_1\zeta_1. \tag{3.5.14}$$

De même, pour le déplacement de deuxième espèce caractérisé par la table (3.5.11), on a

$$xyz \xrightarrow[\beta_2]{y,\ y_2'} x_2'y_2'z_2' \xrightarrow[\alpha_2]{x_2',\ \xi_2'} \xi_2'\eta_2'\zeta_2' \xrightarrow[\gamma_2]{\zeta_2',\ \zeta_2} \xi_2\eta_2\zeta_2. \tag{3.5.15}$$

Considérons encore, à titre d'exemple, les tables (3.4.5), (3.4.10) et (3.4.16) qui ont été obtenues au cours du paragraphe précédent et qui se rapportent à l'orientation d'un mobile (en particulier, d'une fusée balistique) commandé par deux gyroscopes. Compte tenu des explications concernant la composition de ces tables, on peut représenter les déplacements angulaires qui leur correspondent sous la forme des écritures conventionnelles suivantes:

$$xyz \xrightarrow[\alpha_1]{x,\ x_1} x_1y_1z_1 \xrightarrow[\beta_1]{z_1,\ \zeta_1} \xi_1\eta_1\zeta_1 \xrightarrow[\gamma_1]{\eta_1,\ \eta} \xi\eta\zeta \tag{3.5.16}$$

dans le cas de la table (3.4.5);

$$xyz \xrightarrow[-\alpha_2]{y,\ y_2} x_2y_2z_2 \xrightarrow[-\beta_2]{z_2,\ \zeta_2} \xi_2\eta_2\zeta_2 \xrightarrow[-\gamma_2]{\xi_2,\ \xi} \xi\eta\zeta \tag{3.5.17}$$

pour la table (3.4.10) et enfin,

$$\xi\eta\zeta \xrightarrow[-\psi]{\zeta,\ \zeta'} \xi'\eta'\zeta' \xrightarrow[-\theta]{\xi',\ x'} x'y'z' \xrightarrow[-\varphi]{z',\ z} xyz \tag{3.5.18}$$

dans le cas de la table (3.4.16).

Remarquons que chacun des schémas (c'est-à-dire des écritures conventionnelles) donnés ci-dessus peut s'écrire dans l'ordre inverse, si l'on change, bien entendu, les signes de tous les angles de rotation. C'est ainsi que le dernier schéma peut être remplacé par un schéma équivalent suivant:

$$xyz \xrightarrow[\varphi]{z,\, z'} x'y'z' \xrightarrow[\vartheta]{x',\, \xi'} \xi'\eta'\zeta' \xrightarrow[\psi]{\xi',\, \zeta} \xi\eta\zeta. \qquad (3.5.19)$$

Montrons maintenant comment on peut obtenir la table (3.4.5) sans procéder à des calculs fastidieux faits au paragraphe précédent. A cet effet, il convient d'utiliser le schéma (3.5.16) du déplacement angulaire correspondant à la table (3.4.5) et de se servir de celle des tables (3.5.6) ou (3.5.11) qui se rapporte au déplacement de même espèce. Opérons d'abord un changement des désignations des axes et des angles dans le schéma (3.5.16), à savoir remplaçons les lettres x, y, z; x_1, y_1, z_1; ξ_1, η_1, ζ_1 et ξ, η, ζ respectivement par y, z, x; y_2', z_2', x_2'; η_2', ζ_2', ξ_2' et η_2, ζ_2, ξ_2. Nous obtenons un nouveau schéma

$$yzx \xrightarrow[\alpha_1]{y,\, y_2'} y_2'z_2'x_2' \xrightarrow[\beta_1]{x_2',\, \xi_2'} \eta_2'\zeta_2'\xi_2' \xrightarrow[\gamma_1]{\zeta_2',\, \zeta_2} \eta_2\zeta_2\xi_2. \qquad (3.5.20)$$

qui prend, après une permutation cyclique des lettres peu importante, la forme suivante:

$$xyz \xrightarrow[\alpha_1]{y,\, y_2'} x_2'y_2'z_2' \xrightarrow[\beta_1]{x_2',\, \xi_2'} \xi_2'\eta_2'\zeta_2' \xrightarrow[\gamma_1]{\zeta_2',\, \zeta_2} \xi_2\eta_2\zeta_2. \qquad (3.5.21)$$

D'après le schéma (3.5.21), la rotation du trièdre *abc* autour de l'arête *a* est précédée par la rotation autour de l'arête *b* qui se confond au cours de cette rotation avec les axes y et y_2'. On est donc ici en présence d'un déplacement angulaire de deuxième espèce. Il convient donc de remplacer suivant le schéma (3.5.15) les désignations α_1 par β_2, β_1 par α_2 et γ_1 par γ_2. Si maintenant on effectue, dans la table de deuxième espèce (3.5.11), tous les changements de lettres dans l'ordre inverse, on obtient, après une permutation cyclique des lignes et des colonnes supplémentaire, la table cherchée (3.4.5).

La table des cosinus des angles formés entre les axes des systèmes de coordonnées xyz et $\xi\eta\zeta$, qui correspond au schéma (3.5.17) peut être composée, elle aussi, sans procéder à des calculs volumineux faits au § 4 du présent chapitre. Il suffit de remplacer dans le schéma (3.5.17) les lettres x, y, z; x_2, y_2, z_2; ξ_2, η_2, ζ_2 et ξ, η, ζ respectivement par z, x, y; z_1', x_1', y_1'; ζ_1', ξ_1', η_1' et ζ_1, ξ_1, η_1. Il en résulte, après quelques transformations, le schéma d'un déplacement angulaire de première espèce:

$$xyz \xrightarrow[-\alpha_2]{x,\, x_1'} x_1'y_1'z_1' \xrightarrow[-\beta_2]{y_1',\, \eta_1'} \xi_1'\eta_1'\zeta_1' \xrightarrow[-\gamma_2]{\zeta_1',\, \zeta} \xi_1\eta_1\zeta_1. \qquad (3.5.22)$$

Pour obtenir une coïncidence complète entre les schémas (3.5.22) et (3.5.14), il faut encore remplacer $-\alpha_2$ par α_1, $-\beta_2$ par β_1 et $-\gamma_2$

par γ_1. Si maintenant dans la table de première espèce (3.5.6) se rapportant au schéma (3.5.14) on reprend les désignations adoptées dans le schéma (3.5.17) et que, de plus, on effectue une permutation cyclique des colonnes et des lignes, on obtient directement, sans aucun calcul la table (3.4.10).

Au schéma (3.5.18) ou au schéma (3.5.19) qui lui est équivalent ne correspond ni le déplacement angulaire de première espèce, ni celui de deuxième, car dans la suite de rotations considérées il y en a deux qui s'effectuent autour d'un même axe. Au début de ce paragraphe nous avons indiqué les angles dits classiques d'Euler (v. fig. 78) auxquels correspondent des rotations qui font passer le trièdre *abc* de la position $x_0y_0z_0$ dans la position xyz : à savoir les rotations successives d'angle ψ autour de l'arête c, d'angle θ autour de l'arête a (qui vient de se confondre avec la ligne des nœuds) et enfin, d'angle φ de nouveau autour de l'arête c (dans sa nouvelle position). A cette suite de rotations correspond l'écriture conventionnelle

$$x_0y_0z_0 \xrightarrow[\psi]{z_0,\ z_1} x_1y_1z_1 \xrightarrow[\theta]{x_1,\ x_2} x_2y_2z_2 \xrightarrow[\varphi]{z_2,\ z} xyz, \tag{3.5.23}$$

où $x_1y_1z_1$ et $x_2y_2z_2$ sont les désignations des positions intermédiaires du trièdre *abc*. La comparaison des schémas (3.5.23) et (3.5.18) permet de conclure que la table des cosinus des angles formés entre les axes des systèmes $x_0y_0z_0$ et xyz, dans laquelle tous les angles sont exprimés par l'intermédiaire des angles classiques d'Euler ψ, θ et φ, peut s'obtenir sans avoir recours à des considérations de nature géométrique. Il suffit, dans la table (3.4.16) du § 4 de ce chapitre, de changer les signes des angles ψ et φ, de poser $\vartheta = -\theta$ et enfin, de remplacer les lettres ξ, η, ζ par x_0, y_0, z_0. On obtient finalement la table cherchée:

	x	y	z
x_0	$-\sin\psi\cos\theta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi$	$-\sin\psi\cos\theta\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi$	$\sin\psi\sin\theta$
y_0	$\cos\psi\cos\theta\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi$	$\cos\psi\cos\theta\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi$	$-\cos\psi\sin\theta$
z_0	$\sin\theta\sin\varphi$	$\sin\theta\cos\varphi$	$\cos\theta$

(3.5.24)

que l'on peut trouver dans de nombreux traités de géométrie analytique.

Ainsi, en se servant des tables déjà composées des cosinus des angles formés entre les axes de deux systèmes de coordonnées quelconques, on peut obtenir, par remplacement des désignations des axes et des angles, de nombreuses autres tables sans procéder à des constructions ou à des calculs supplémentaires.

§ 6. Sur l'orientation d'un mobile stabilisé par un dispositif utilisant trois gyroscopes

Proposons-nous de déterminer la position d'un mobile par rapport au système d'orientation fixe $\xi\eta\zeta$ à l'aide de trois *angles d'Euler-Krylov*. A cet effet, associons au mobile un système de coordonnées xyz dont les axes se confondent, dans la position initiale du mobile, avec des axes correspondants du système $\xi\eta\zeta$. Le passage du système

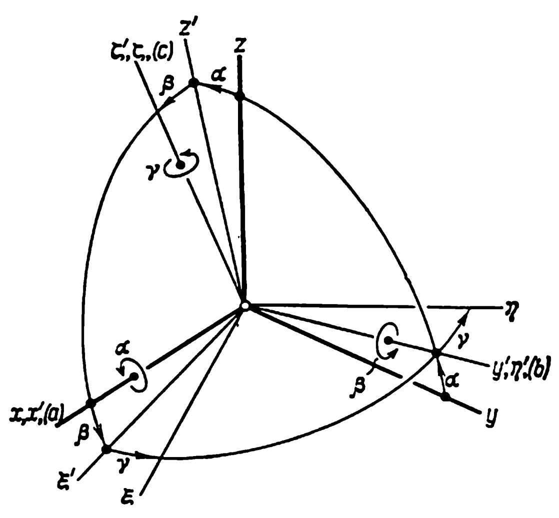


Fig. 85

xyz au système $\xi\eta\zeta$ peut être réalisé pour une position quelconque du mobile au moyen de trois rotations finies du trièdre abc examiné au § 5 du présent chapitre, qui s'effectuent successivement autour de ses arêtes a, b et c. Les angles correspondant à ces rotations seront désignés par α, β et γ (fig. 85). Leurs valeurs se déterminent par la position relative des systèmes xyz et $\xi\eta\zeta$ sus-mentionnés. La première rotation du trièdre doit se faire de l'angle α autour de l'arête a confondue avec l'axe x. Nous conviendrons de considérer que pour $\alpha = 0$ les arêtes b et c se confondent respectivement avec les axes y et z et que pour $\alpha > 0$ le trièdre est tourné en sens inverse des aiguilles d'une montre, si la rotation est observée du côté de la partie positive de l'axe x. Par suite de la rotation d'angle α, le trièdre abc occupera une position $x'y'z'$ dans laquelle l'axe x' sera à la fois l'axe x du système xyz lié au mobile. La rotation suivante du trièdre abc se fait de l'angle β autour de son arête b qui est confondue maintenant avec l'axe y'. D'une manière analogue, nous considérons que $\beta > 0$ si le trièdre est tourné par rapport à la position $x'y'z'$ en sens

inverse des aiguilles d'une montre, lorsque la rotation est observée du côté de la partie positive de l'axe y'. Désignons par $\xi'\eta'\zeta'$ la position occupée par le trièdre *abc* après sa deuxième rotation. Enfin, la dernière rotation du trièdre de la position $\xi'\eta'\zeta'$ dans la position $\xi\eta\zeta$ s'effectue de l'angle γ autour de l'arête c qui prend, après deux rotations précédentes, la position des axes confondus ζ' et ζ. Posons $\gamma > 0$ si le trièdre *abc* est tourné en sens inverse des aiguilles d'une montre par rapport à sa position intermédiaire $\xi'\eta'\zeta'$, lorsque la rotation est observée du côté de la partie positive de l'axe ζ' ou, ce qui revient au même, de l'axe ζ. On se rend compte sans peine que la suite des rotations du trièdre que nous venons de considérer est, d'après la terminologie adoptée au § 5 de ce chapitre, un déplacement angulaire de première espèce. Il fait passer le trièdre *abc* de la position xyz dans la position $\xi\eta\zeta$. Les cosinus des angles formés entre les axes des systèmes $\xi\eta\zeta$ et xyz se déterminent donc par la table (3.5.6) dans laquelle il convient d'omettre tous les indices des axes ξ, η, ζ et des angles α, β, γ. Il vient

	x	y	z
ξ	$\cos\beta\cos\gamma$	$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma +$ $+\cos\alpha\sin\gamma$	$-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma +$ $+\sin\alpha\sin\gamma$
η	$-\cos\beta\sin\gamma$	$-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma +$ $+\cos\alpha\cos\gamma$	$\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma +$ $+\sin\alpha\cos\gamma$
ζ	$\sin\beta$	$-\sin\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha\cos\beta$.

(3.6.1)

On sait que les angles α, β et γ sont connus sous le nom d'*angles d'Euler-Krylov*. A la différence des angles classiques d'Euler, ils sont toujours petits, à condition qu'est petite la rotation finie qui fait passer le trièdre *abc* directement de la position xyz dans la position $\xi\eta\zeta$. La direction de l'axe de cette rotation finie peut être déterminée à l'aide d'une construction géométrique imaginaire suivante.

Construisons une sphère ayant son centre à l'origine commune des systèmes de coordonnées $\xi\eta\zeta$ et xyz (fig. 86). Les points d'intersection des axes de ces systèmes avec la sphère seront désignés par les mêmes lettres. Marquons les milieux des arcs de grands cercles ξx et ηy (on peut prendre, bien entendu, aussi les arcs ηy, ζz ou ζz, ξx) et construisons les grands cercles de la sphère perpendiculaires aux arcs ξx et ηy et passant par leurs milieux. Il est aisé de s'assurer que l'intersection de ces cercles détermine la position de l'axe de la rotation finie qui fait passer le trièdre de la position xyz dans la position $\xi\eta\zeta$, ce qui constitue le contenu du théorème de Chasles.

Supposons que la position des systèmes xyz et $\xi\eta\zeta$ est donnée et il s'agit de rétablir les trois rotations successives indiquées plus

haut qui font passer le trièdre abc de la position xyz dans la position $\xi\eta\zeta$. Il est facile de voir que la direction de l'axe y' autour duquel s'effectue la deuxième rotation (la première rotation se fait autour de l'axe x et la troisième autour de l'axe ζ) peut être déterminée par une construction bien simple (v. fig. 85). A savoir, l'axe y', de même que l'axe η' qui se confond avec lui, est une droite d'intersection des plans yz et $\xi\eta$. L'angle des axes y' et y est l'angle α, et l'angle des axes y' et η est l'angle γ. Enfin, l'angle β est l'angle formé par l'axe x avec l'axe ξ' qui est perpendiculaire à l'axe η' dans le plan $\xi\eta$.

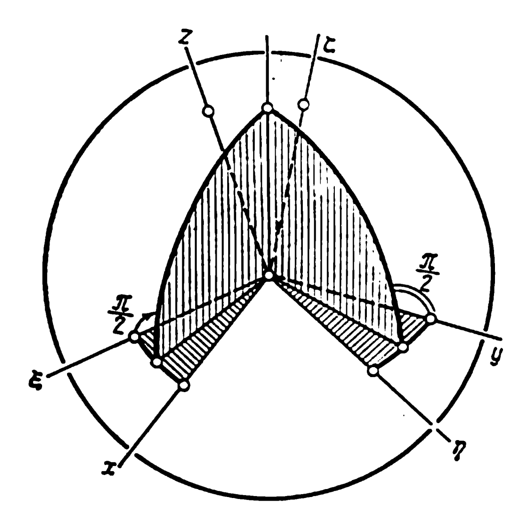


Fig. 86

Installons maintenant à bord d'un mobile trois gyroscopes: I, II et III de telle sorte que l'axe de l'anneau extérieur de la suspension à la cardan du gyroscope I soit parallèle à l'axe x, celui du gyroscope II à l'axe y et celui du gyroscope III à l'axe z (fig. 87). Admettons que dans la position initiale du mobile, lorsque les axes correspondants des systèmes xyz et $\xi\eta\zeta$ sont confondus, l'axe de rotation propre ou, ce qui revient au même, le vecteur moment cinétique propre du gyroscope I est parallèle à l'axe z, celui du gyroscope II à l'axe x et celui du gyroscope III à l'axe y. Dans ce cas, l'axe du boîtier du gyroscope I sera parallèle à l'axe y, celui du gyroscope II à l'axe z et celui du gyroscope III à l'axe x. Supposons que lors des déplacements angulaires du mobile les vecteurs moments cinétiques propres des gyroscopes I, II et III ne changent pas leur orientation par rapport au système $\xi\eta\zeta$. Dans ces conditions, l'axe de rotation propre du gyroscope I sera dirigé, pendant toute la durée du mouvement du mobile, parallèlement à l'axe ζ, celui du gyroscope II

parallèlement à l'axe ξ et celui du gyroscope III parallèlement à l'axe η.

Attachons à l'anneau de cardan extérieur du gyroscope I un système de coordonnées auxiliaire $x_1y_1z_1$ et au boîtier de ce gyroscope un système $\xi_1\eta_1\zeta_1$. Admettons que dans la position initiale du mobile les axes des systèmes $x_1y_1z_1$ et $\xi_1\eta_1\zeta_1$ sont respectivement parallèles aux axes des systèmes xyz et $\xi\eta\zeta$. Il est évident que l'axe x_1 qui est dans ce cas l'axe de l'anneau de cardan extérieur du gyroscope I reste parallèle à l'axe x du système xyz lié au mobile pour toute position (et

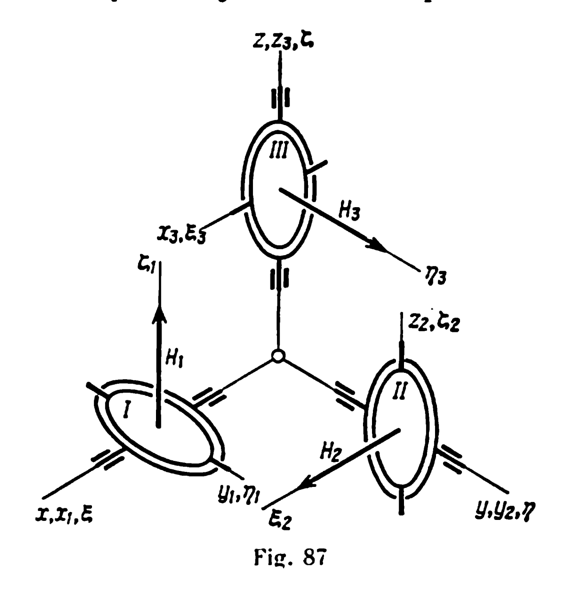


Fig. 87

non seulement initiale) de ce dernier. A son tour, l'axe y_1 du système $x_1y_1z_1$ lié à l'anneau de cardan extérieur est constamment confondu avec l'axe η_1 du boîtier du gyroscope I, alors que l'axe ζ_1 le long duquel est orienté le vecteur moment cinétique propre H_1 de ce gyroscope est, par hypothèse, toujours parallèle à l'axe ζ du système d'orientation fixe $\xi\eta\zeta$.

La position relative des systèmes $x_1y_1z_1$ et $\xi_1\eta_1\zeta_1$ par rapport aux systèmes xyz et $\xi\eta\zeta$ est exactement la même que celle des systèmes $x'y'z'$ et $\xi'\eta'\zeta'$ introduits au début de ce paragraphe lors de la détermination des angles d'Euler-Krylov (fig. 85, 88), par rapport aux mêmes systèmes xyz et $\xi\eta\zeta$. En effet, l'angle de rotation du système $x_1y_1z_1$ autour de l'axe x par rapport au système xyz ou, ce qui revient au même, l'angle de rotation de l'anneau de cardan extérieur du gyroscope I par rapport au mobile, est l'angle α d'Euler-Krylov introduit plus haut. Par ailleurs, l'angle de rotation du système $\xi_1\eta_1\zeta_1$ autour de l'axe y_1 par rapport au système $x_1y_1z_1$, c'est-à-dire du boîtier du

gyroscope I par rapport à son anneau de cardan extérieur, est l'angle β d'Euler-Krylov (v. fig. 88). Enfin, l'angle des axes ξ_1 et ξ (ainsi que des axes η_1 et η) des systèmes $\xi_1\eta_1\zeta_1$ et $\xi\eta\zeta$ est l'angle γ. On suppose dans ce cas que les sens de rotations correspondant aux valeurs positives des angles α, β et γ sont les mêmes que dans le système des angles d'Euler-Krylov.

Associons aux anneaux de cardan extérieurs des gyroscopes II et III les systèmes de coordonnées $x_2y_2z_2$ et $x_3y_3z_3$, et à leurs boîtiers

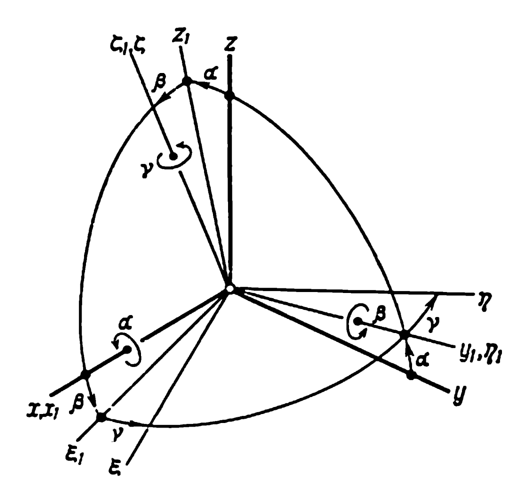


Fig. 88

les systèmes $\xi_2\eta_2\zeta_2$ et $\xi_3\eta_3\zeta_3$. Admettons que dans la position initiale du mobile les axes de tous les systèmes introduits sont parallèles aux axes correspondants du système xyz lié au mobile. Dans ce cas, les axes des anneaux de cardan extérieurs des gyroscopes II et III seront représentés par les axes y_2 et z_3, et ceux de leurs boîtiers respectivement par les axes ζ_2 et ξ_3 (v. fig. 87).

Introduisons des angles λ, μ, ν se rapportant au gyroscope II (fig. 89) et des angles ρ, σ, τ se rapportant au gyroscope III (fig. 90) qui jouent le même rôle que les angles α, β, γ du gyroscope I (v. fig. 88). L'angle λ est dans ce cas l'angle de rotation de l'anneau de cardan extérieur du gyroscope II autour de l'axe y_2 par rapport au mobile ou, ce qui revient au même, l'angle des axes z et z_2 (ainsi que des axes x et x_2) des systèmes xyz et $x_2y_2z_2$ (v. fig. 89). A son tour, l'angle ρ détermine la rotation de l'anneau de cardan extérieur du gyroscope III autour de l'axe z_3 par rapport au mobile (v. fig. 90). Les angles μ et σ analogues à l'angle β du gyroscope I sont des angles de rotation des boîtiers des gyroscopes II et III par rapport à leurs

anneaux de cardan extérieurs respectivement autour des axes z_2 (ζ_2) et x_3 (ξ_3). Enfin, les angles ν et τ déterminent, pareillement à l'angle

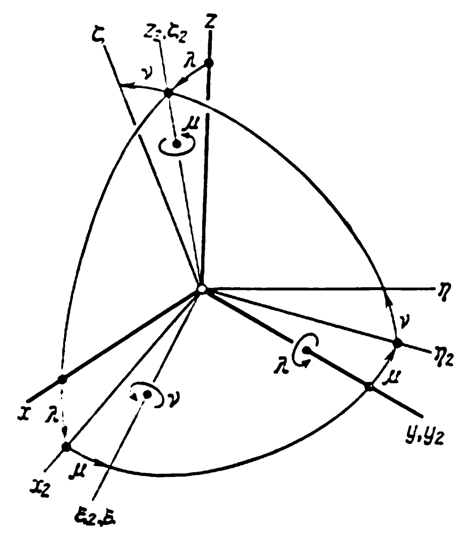


Fig. 89

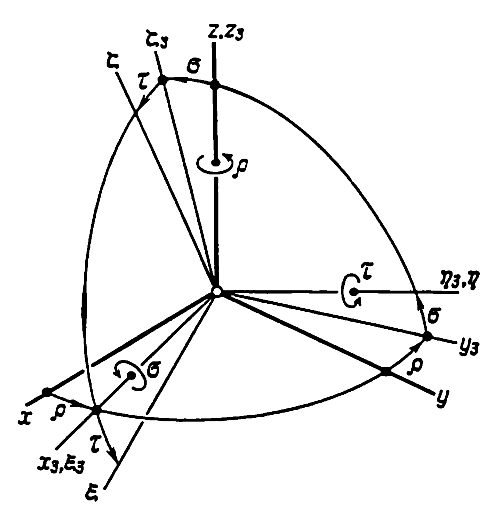


Fig. 90

γ, les rotations des systèmes $\xi_2\eta_2\zeta_2$ et $\xi_3\eta_3\zeta_3$ par rapport au système d'orientation fixe $\xi\eta\zeta$ respectivement autour des axes ξ_2 et η_3 ou, ce qui revient au même, autour des axes ξ et η.

Nous avons donné plus haut la table (3.6.1) des cosinus des angles formés par les axes des systèmes $\xi\eta\zeta$ et xyz. Les éléments de cette table étaient exprimés en fonction des angles d'Euler-Krylov α, β, γ se rapportant au gyroscope I. Pour l'analyse qui suit, il est nécessaire d'exprimer les éléments de la même table (3.6.1) en fonction des autres angles d'Euler-Krylov se rapportant soit au gyroscope II, c'est-à-dire en fonction des angles λ, μ, ν, soit au gyroscope III, c'est-à-dire en fonction des angles ρ, σ, τ. En résolvant ce problème, on peut éviter des calculs relativement volumineux que comporte la construction des tables des cosinus des angles formés entre les axes des systèmes dont l'un est obtenu à partir de l'autre par suite de trois rotations finies. Montrons par exemple comment, d'une façon directe, on peut obtenir une table analogue à la table (3.6.1), dont les éléments sont exprimés en fonction d'un autre ensemble des angles d'Euler-Krylov, à savoir des angles λ, μ et ν. A cet effet, désignons les axes x, y, z respectivement par z^*, x^*, y^* ; les axes x_2, y_2, z_2 par z_1^*, x_1^*, y_1^* ; les axes ξ_2, η_2, ζ_2 par ζ_1^*, ξ_1^*, η_1^* et enfin, les axes ξ, η, ζ par ζ^*, ξ^*, η^* ; les angles λ, μ et ν par α^*, β^* et γ^* (fig. 91 à 93). Il n'est pas difficile de voir que la position relative des systèmes $x^*y^*z^*$, $x_1^*y_1^*z_1^*$, $\xi_1^*\eta_1^*\zeta_1^*$, $\xi^*\eta^*\zeta^*$ ainsi obtenus est exactement la même que la position relative des systèmes xyz, $x_1y_1z_1$, $\xi_1\eta_1\zeta_1$, $\xi\eta\zeta$ se rapportant au gyroscope I. En particulier, le système de coordonnées $x_1^*y_1^*z_1^*$ lié à l'anneau de cardan extérieur du gyroscope II est tourné de l'angle $\alpha^* = \lambda$ autour de l'axe x^* (x_1^*, y, y_2) en sens inverse des aiguilles d'une montre par rapport au système $x^*y^*z^*$ lié au mobile (v. fig. 91). Il en est de même pour l'angle $\beta^* = \mu$ (v. fig. 92) qui caractérise la position du système de coordonnées $\xi_1^*\eta_1^*\zeta_1^*$ par rapport au système $x_1^*y_1^*z_1^*$ (leurs axes y_1^* et η_1^* sont confondus l'un avec l'autre et avec les axes z_2 et ζ_2). De même, par suite de la rotation d'angle $\gamma^* = \nu$ autour de l'axe ζ^* (ζ_1^*, ξ_2, ξ), les axes ξ_1^*, η_1^* du système $\xi_1^*\eta_1^*\zeta_1^*$ lié au boîtier du gyroscope II se confondent respectivement avec les axes ξ^*, η^* du système non tournant $\xi^*\eta^*\zeta^*$ (v. fig. 93). Aussi, pour obtenir la table des cosinus des angles formés entre les axes des systèmes $x^*y^*z^*$ et $\xi^*\eta^*\zeta^*$, suffit-il de reproduire, avec des changements des désignations signalés plus haut, la table (3.6.1), ce qui donne:

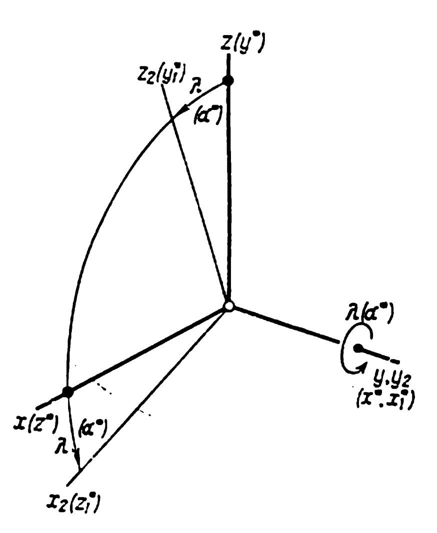


Fig. 91

	$x^*(y)$	$y^*(z)$	$z^*(x)$
$\xi^*(\eta)$	$\cos\beta^*\cos\gamma^*$	$\sin\alpha^*\sin\beta^*\cos\gamma^* + \cos\alpha^*\sin\gamma^*$	$-\cos\alpha^*\sin\beta^*\cos\gamma^* + \sin\alpha^*\sin\gamma^*$
$\eta^*(\zeta)$	$-\cos\beta^*\sin\gamma^*$	$-\sin\alpha^*\sin\beta^*\sin\gamma^* + \cos\alpha^*\cos\gamma^*$	$\cos\alpha^*\sin\beta^*\sin\gamma^* + \sin\alpha^*\cos\gamma^*$
$\zeta^*(\xi)$	$\sin\beta^*$	$-\sin\alpha^*\cos\beta^*$	$\cos\alpha^*\cos\beta^*$.

(3.6.2)

Revenons maintenant aux anciennes désignations et remplaçons dans la dernière table les angles α^*, β^*, γ^* par λ, μ, ν et les axes x^*, y^*, z^*

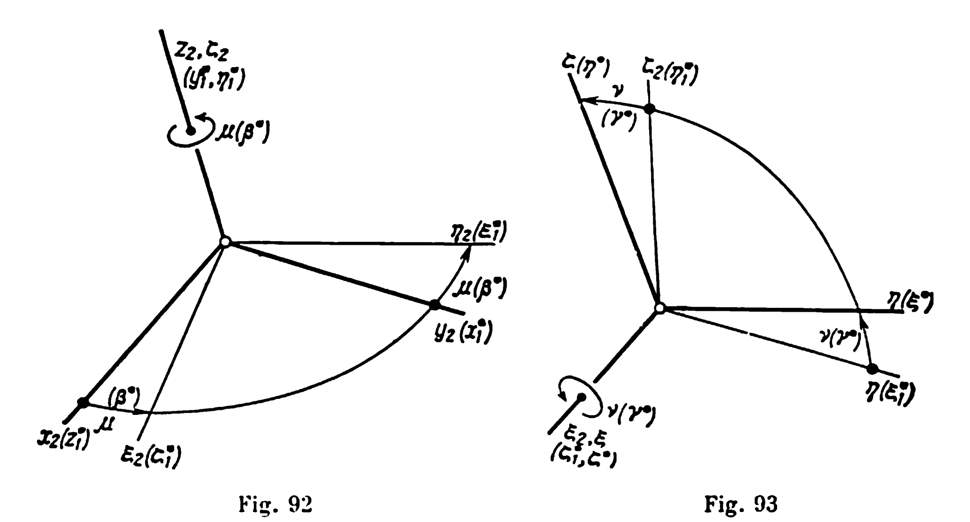


Fig. 92 Fig. 93

et ξ^*, η^*, ζ^* respectivement par y, z, x et η, ζ, ξ. Si, de plus, on effectue une permutation cyclique des colonnes et des lignes, on obtient la table suivante:

	x	y	z
ξ	$\cos\lambda\cos\mu$	$\sin\mu$	$-\sin\lambda\cos\mu$
η	$-\cos\lambda\sin\mu\cos\nu + \sin\lambda\sin\nu$	$\cos\mu\cos\nu$	$\sin\lambda\sin\mu\cos\nu + \cos\lambda\sin\nu$
ζ	$\cos\lambda\sin\mu\sin\nu + \sin\lambda\cos\nu$	$-\cos\mu\sin\nu$	$-\sin\lambda\sin\mu\sin\nu + \cos\lambda\cos\nu$.

(3.6.3)

Dans cette table, les cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes de coordonnées $\xi\eta\zeta$ et xyz sont exprimés en fonction des

angles λ, μ, ν se rapportant au gyroscope II. En reprenant des raisonnements analogues à ceux qui viennent d'être développés et qui se ramènent finalement au remplacement dans la dernière table des angles λ, μ, ν par ρ, σ, τ et des axes x, y, z et ξ, η, ζ de nouveau par y, z, x et η, ζ, ξ, on obtient, après une permutation cyclique supplémentaire des lignes et des colonnes, une nouvelle table

	x	y	z
ξ	$-\sin\rho\sin\sigma\sin\tau + \cos\rho\cos\tau$	$\cos\rho\sin\sigma\sin\tau + \sin\rho\cos\tau$	$-\cos\sigma\sin\tau$
η	$-\sin\rho\cos\sigma$	$\cos\rho\cos\sigma$	$\sin\sigma$
ζ	$\sin\rho\sin\sigma\cos\tau + \cos\rho\sin\tau$	$-\cos\rho\sin\sigma\cos\tau + \sin\rho\sin\tau$	$\cos\sigma\cos\tau$.

(3.6.4)

Dans cette table, les cosinus des angles formés entre les axes des systèmes $\xi\eta\zeta$ et xyz sont exprimés par l'intermédiaire des angles ρ, σ, τ se rapportant au gyroscope III. Si l'on y remplace les angles ρ, σ, τ par α, β, γ et les axes x, y, z et ξ, η, ζ de nouveau par y, z, x et η, ζ, ξ, on obtient, bien entendu, la table initiale (3.6.1).

Comme il vient d'être indiqué, les éléments des tables (3.6.1), (3.6.3) et (3.6.4) ne font que de représenter de façons différentes les mêmes cosinus des angles formés entre les axes des systèmes $\xi\eta\zeta$ et xyz. C'est ainsi que dans la table (3.6.1) ces cosinus sont exprimés par l'intermédiaire des angles α, β, γ qui se rapportent au gyroscope I et sont en même temps les angles d'Euler-Krylov cherchés. Dans la table (3.6.3), les mêmes cosinus sont exprimés par les angles λ, μ, ν qui se rapportent au gyroscope II et enfin, dans la table (3.6.4) ils s'expriment par l'intermédiaire des angles ρ, σ, τ liés au gyroscope III. On peut donc établir en principe 18 relations qui lient neuf angles: α, β. γ, λ, μ, ν, ρ, σ, τ. Pourtant, seulement six de ces relations sont indépendantes parce qu'il est géométriquement évident que par exemple les angles λ, μ, ν, ρ, σ, τ doivent se déterminer entièrement par la donnée des angles α, β, γ. En effet, le triplet d'angles λ, μ, ν, de même que le triplet d'angles ρ, σ, τ, représente une modification du système d'angles d'Euler-Krylov et doit donc se déterminer de façon univoque par la donnée de la position du mobile ou, ce qui revient au même, par la position donnée du système de coordonnées xyz, qui lui est lié, par rapport au système d'orientation fixe $\xi\eta\zeta$. Cette position se détermine, à son tour, par la donnée des angles fondamentaux α, β et γ d'Euler-Krylov.

Les plus faciles à enregistrer à bord d'un mobile sont les angles de rotations des anneaux de cardan extérieurs des gyroscopes I, II, III par rapport au mobile lui-même, c'est-à-dire les angles α, λ et ρ. Le premier d'entre eux est un des angles fondamentaux d'Euler-

Krylov. Dans ce qui suit, nous nous proposons de déterminer les deux autres angles d'Euler-Krylov, à savoir les angles β et γ en fonction des angles α, λ et ρ. A cet effet, on peut faire usage de n'importe lesquelles des 18 relations mentionnées plus haut. Mais le problème se complique fortement du fait que dans ces relations il faut faire disparaître les angles μ et σ représentant les rotations des boîtiers des gyroscopes II et III par rapport à leurs anneaux de cardan extérieurs, ainsi que les angles ν et τ. Une mesure directe de ces derniers à bord du mobile est impossible à réaliser parce qu'aucun corps matériel n'est lié au système de coordonnées non tournant $\xi\eta\zeta$. En effet, l'angle τ caractérise la rotation du boîtier du gyroscope III, donc du système de coordonnées $\xi_3\eta_3\zeta_3$ qui lui est lié, par rapport au système $\xi\eta\zeta$ autour de l'axe η_3 parallèle à l'axe η. Le rôle de l'angle ν est exactement le même (mais par rapport au gyroscope II).

Passons maintenant à la détermination directe des angles β et γ d'après les valeurs données des angles α, λ et ρ. Ecrivons le rapport de $\cos(\widehat{z, \xi})$ à $\cos(\widehat{x, \xi})$, en utilisant une fois la table (3.6.1) et une autre fois, la table (3.6.3), et égalons les résultats. Il vient

$$-\cos\alpha \operatorname{tg}\beta + \sin\alpha \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\beta} = -\operatorname{tg}\lambda. \tag{3.6.5}$$

Faisons la même chose avec le rapport de $\cos(\widehat{y, \eta})$ à $\cos(\widehat{x, \eta})$, en utilisant les tables (3.6.1) et (3.6.4). Il en résulte une nouvelle égalité

$$-\sin\alpha \operatorname{tg}\beta + \cos\alpha \frac{\operatorname{cotg}\gamma}{\cos\beta} = \operatorname{cotg}\rho. \tag{3.6.6}$$

Les égalités (3.6.5) et (3.6.6) peuvent être considérées comme des équations pour la détermination des angles β et γ d'après les angles donnés α, λ et ρ. En éliminant $\operatorname{tg}\gamma$ entre ces équations, on obtient la relation

$$\sin\alpha\cos\alpha = (-\operatorname{tg}\lambda\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\left(\frac{\cos\beta}{\operatorname{tg}\rho} + \sin\alpha\sin\beta\right), \tag{3.6.7}$$

d'où, toutes réductions effectuées,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\rho + \operatorname{tg}\lambda}{\cos\alpha - \sin\alpha\operatorname{tg}\rho\operatorname{tg}\lambda}. \tag{3.6.8}$$

Le problème de la détermination de l'angle β peut donc être considéré comme résolu. En se servant de nouveau des équations (3.6.5) et (3.6.6), on peut obtenir la relation suivante:

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^2\gamma = \frac{-\operatorname{tg}\lambda + \cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{1 + \sin\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\rho}\operatorname{tg}\rho. \tag{3.6.9}$$

En y introduisant la valeur de $\operatorname{tg}\beta$ donnée par la formule (3.6.8), on obtient, toutes réductions effectuées, la formule

$$\operatorname{tg}^2\gamma = \operatorname{tg}\rho \frac{\operatorname{tg}^2\lambda + \cos^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha \operatorname{tg}^2\rho} \tag{3.6.10}$$

qui détermine, au signe près, l'angle γ. Pour trouver le signe de l'angle γ, remarquons que, lorsque les valeurs des angles α, β et γ sont petites, les angles λ et ρ doivent être, eux aussi, petits en vertu des équations (3.6.5) et (3.6.6). En développant en séries les fonctions trigonométriques des angles mentionnés et en ne gardant dans ces séries que des termes de premier et de deuxième ordres, on obtient, après quelques transformations simples, les formules approchées

$$\beta = \lambda + \alpha\gamma, \quad \gamma = \rho. \tag{3.6.11}$$

La dernière des égalités (3.6.11) permet de choisir le signe du radical qui apparaît lors de la simplification ultérieure de la formule (3.6.10), et de la mettre sous la forme

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\rho \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\lambda + \cos^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha \operatorname{tg}^2\rho}}. \tag{3.6.12}$$

Notons avant de clore ce paragraphe que la disposition examinée de trois gyroscopes par rapport au système xyz lié au mobile se caractérise par une sorte de symétrie par rapport à une droite qui fait des angles égaux avec les axes x, y et z. En effet, si le mobile tourne de $2\pi/3$ autour de cette droite, il suffit d'effectuer une permutation cyclique des désignations des axes et des angles pour faire disparaître complètement la différence entre les positions nouvelle et ancienne des suspensions à la cardan des gyroscopes par rapport au mobile. Mais il se peut que pour des raisons d'ordre technique une telle disposition ne soit pas optimale si le mobile se meut avec une forte accélération dirigée essentiellement le long de l'axe z, par exemple. Dans un tel cas, la position initiale préférable du gyroscope I est celle dans laquelle l'axe de son boîtier est dirigé parallèlement à l'axe z lié au mobile. Dans ces conditions, l'axe de rotation propre du gyroscope I sera parallèle à l'axe y, de même que pour le gyroscope III. Quant à l'axe du rotor du gyroscope II, il reste, comme précédemment, parallèle à l'axe x. Il est évident que les angles d'Euler-Krylov qui déterminent la position du mobile par rapport au système d'orientation fixe $\xi\eta\zeta$ s'exprimeront encore par les angles de rotation des anneaux de cardan extérieurs des gyroscopes I, II, III, mais, bien entendu, à l'aide des formules qui diffèrent un peu de (3.6.8) et (3.6.12). Ces formules, on peut les obtenir en appliquant une méthode analogue à celle décrite dans le présent paragraphe et en mettant en profit les formules et les tables données au § 4 de ce chapitre, où l'on a examiné l'orientation d'un mobile commandé par deux gyroscopes: un gyroscope de verticale et un gyrohorizon. Il

n'est pas difficile de se convaincre que dans cette nouvelle position, le gyroscope I (v. fig. 61) correspondra au gyrohorizon et le gyroscope II, au gyroscope de verticale. Les formules et les tables se rapportant au gyroscope II seront, bien entendu, les mêmes, à des désignations près; de plus, tout ce qui se rapporte au gyroscope III doit être utilisé sans changement.

§ 7. Application des matrices à la résolution des problèmes géométriques des systèmes de stabilisation

Toute rotation finie d'un corps solide autour d'un point fixe se caractérise par la direction de l'axe de rotation et par l'angle dont tourne un trièdre *abc* lié au corps, lorsque celui-ci passe d'une position dans une autre. Analytiquement, la rotation est entièrement déterminée par la table des cosinus des angles formés entre les axes des systèmes de coordonnées avec lesquels étaient confondues les directions des arêtes du trièdre *abc* dans la position initiale et dans la position prise par suite de la rotation. Admettons qu'en position de départ le trièdre était confondu avec un système de coordonnées xyz et en position d'arrivée, avec un système $\xi\eta\zeta$. Convenons de disposer les éléments k_{ij} (ici et plus loin $i, j = 1, 2, 3$) de la table des cosinus des angles que font entre eux les axes de ces systèmes

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ \xi & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ \eta & k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ \zeta & k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{array} \qquad (3.7.1)$$

de telle sorte que les lettres désignant les axes du système de départ (xyz dans le cas considéré) occupent la ligne horizontale et celles qui correspondent au système d'arrivée ($\xi\eta\zeta$), la colonne verticale. On peut introduire l'écriture symbolique suivante de la table (3.7.1):

$$\Xi = KX, \qquad (3.7.2)$$

où la lettre X est le symbole conventionnel du système xyz, la lettre Ξ celui du système $\xi\eta\zeta$ et K le symbole de la rotation finie. Ce dernier sera identifié à la matrice

$$K = \left\| \begin{matrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{matrix} \right\|, \qquad (3.7.3)$$

que nous appellerons *matrice de rotation finie*.

Si le trièdre *abc* effectue, à partir de la position $\xi\eta\zeta$, encore une rotation finie et prend une nouvelle position uvw, on fera correspon-

dre à cette rotation la table des cosinus l_{ij} des angles formés entre les axes des systèmes $\xi\eta\zeta$ et uvw. D'après ce qui vient d'être établi, cette table peut se mettre sous la forme suivante:

$$\begin{array}{cccc} & \xi & \eta & \zeta \\ u & l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ v & l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ w & l_{31} & l_{32} & l_{33}. \end{array} \qquad (3.7.4)$$

Dans la représentation symbolique de cette nouvelle rotation finie

$$U = L\Xi \qquad (3.7.5)$$

le symbole L représente la matrice

$$L = \begin{Vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{Vmatrix}, \qquad (3.7.6)$$

et Ξ et U sont les symboles des systèmes de coordonnées $\xi\eta\zeta$ et uvw.

Deux rotations finies successives du trièdre abc de la position de départ xyz dans la position intermédiaire $\xi\eta\zeta$ et ensuite de la position $\xi\eta\zeta$ dans la position d'arrivée uvw sont équivalentes à une seule rotation finie dont la table des cosinus m_{ij} des angles formés entre les axes des systèmes uvw et xyz, soit:

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ u & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ v & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ w & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{array} \qquad (3.7.7)$$

est facile à obtenir (v. chap. I, § 1) si les tables (3.7.1) et (3.7.4) sont données. En particulier, on a par exemple

$$m_{23} = \cos(\widehat{v, z}) = \cos(\widehat{v, \xi})\cos(\widehat{\xi, z}) + \cos(\widehat{v, \eta})\cos(\widehat{\eta, z}) + \cos(\widehat{v, \zeta})\cos(\widehat{\zeta, z}) = l_{21}k_{13} + l_{22}k_{23} + l_{23}k_{33} \qquad (3.7.8)$$

et dans le cas général

$$m_{ij} = \sum_{\sigma=1}^{3} l_{i\sigma}k_{\sigma j} \quad (i, j = 1, 2, 3). \qquad (3.7.9)$$

Reportons-nous maintenant à l'écriture symbolique. D'une part, on a

$$U = MX, \qquad (3.7.10)$$

où M est la matrice correspondant à la table (3.7.7), c'est-à-dire

$$M = \begin{Vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{Vmatrix}. \quad (3.7.11)$$

D'autre part, si l'on remplace dans l'égalité (3.7.5) le symbole Ξ du système $\xi\eta\zeta$ par sa représentation (3.7.2), on obtient

$$U = LKX. \quad (3.7.12)$$

Il est évident que le symbole M de rotation finie dans la formule (3.7.10) est équivalent au symbole LK dans l'égalité (3.7.12). Il convient donc de poser

$$LK = M. \quad (3.7.13)$$

La dernière égalité peut également être considérée comme résultat de la multiplication à gauche de la matrice K par la matrice L (ou, ce qui revient au même, de la multiplication à droite de la matrice L par la matrice K). En effet, la formule (3.7.9), suivant laquelle les éléments de la matrice M sont obtenus à partir des éléments des matrices K et L, définit précisément la règle de multiplication à gauche de la matrice K par la matrice L. Ainsi, la matrice M du résultat de deux rotations finies successives K et L est égale au produit à gauche de la matrice K de la première rotation par la matrice L de la deuxième.

Il n'est pas difficile d'établir une matrice qui correspond à une rotation finie d'angle α du trièdre abc autour de son arête a. A cet effet, il suffit de se reporter à la table (3.5.2) du § 5 de ce chapitre. Cette table caractérise la rotation du trièdre abc, qui le fait passer de sa position initiale xyz dans la position $x'_1y'_1z'_1$, et s'effectue d'un angle α_1 autour de l'arête a confondue avec les axes x et x'_1. La disposition des lettres x, y, z et x'_1, y'_1, z'_1 dans cette table correspond exactement à la condition adoptée plus haut: les lettres x, y, z occupent une ligne horizontale et les lettres x'_1, y'_1, z'_1 une colonne verticale. En omettant dans la table (3.5.2) l'indice dont est affecté l'angle α, nous concluons que la matrice

$$A(\alpha) = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix} \quad (3.7.14)$$

correspond à la rotation finie d'angle α du trièdre abc autour de l'arête a.

Reportons-nous maintenant à la table (3.5.3) du § 5 de ce chapitre, qui caractérise la rotation d'angle β_1 du trièdre abc autour de l'arête b confondue avec les axes y'_1 et η'_1. Cette rotation fait passer

le trièdre de la position $x'_1y'_1z'_1$ dans la position $\xi'_1\eta'_1\zeta'_1$. On voit maintenant sans peine que la matrice

$$B(\beta)=\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{Vmatrix} \qquad (3.7.15)$$

détermine la rotation finie du trièdre *abc*, effectuée de l'angle β autour de l'arête *b*.

Enfin, en partant de la table (3.5.5) du même paragraphe, il est facile de conclure que la matrice

$$C(\gamma)=\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad (3.7.16)$$

caractérise la rotation finie de l'angle γ du trièdre *abc* autour de l'arête *c*.

Considérons maintenant la représentation symbolique des rotations successives du trièdre *abc* autour de ses arêtes *a*, *b* et *c*, s'effectuant respectivement d'angles α, β et γ. La première rotation d'angle α qui fait passer le trièdre de la position *xyz* dans la position $x'y'z'$ s'effectue autour de l'arête *a* qui se confond avec les axes *x* et x'. Son écriture symbolique est de la forme

$$X' = A(\alpha)X. \qquad (3.7.17)$$

A la rotation suivante du même trièdre, qui le fait passer de la position $x'y'z'$ dans la position $\xi'\eta'\zeta'$ et qui s'accomplit de l'angle β autour de l'arête *b*, confondue, dans sa nouvelle position, avec les axes y' et η', correspond l'écriture

$$\Xi' = B(\beta)X'. \qquad (3.7.18)$$

Enfin, pour la rotation finale effectuée de la position $\xi'\eta'\zeta'$ dans la position $\xi\eta\zeta$, de l'angle γ autour de l'arête *c* confondue après les deux premières rotations avec les axes ζ' et ζ on a

$$\Xi = C(\gamma)\Xi'. \qquad (3.7.19)$$

Introduisons dans l'égalité (3.7.18) l'expression de X' donnée par la formule symbolique (3.7.17). Il vient

$$\Xi' = B(\beta)A(\alpha)X. \qquad (3.7.20)$$

D'après ce qui précède, le produit des matrices:

$$B(\beta)A(\alpha) = D(\alpha, \beta) \qquad (3.7.21)$$

donne une nouvelle matrice qui détermine la rotation finie du trièdre *abc* de la position initiale *xyz* directement dans la position $\xi'\eta'\zeta'$.

C'est la table (3.5.4) du § 5 de ce chapitre qui correspond justement à une telle rotation. La matrice correspondant à cette table est

$$D(\alpha, \beta)=\begin{Vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{Vmatrix} \tag{3.7.22}$$

dans laquelle on doit, certes, remplacer les désignations de α par α_1 et de β par β_1. Il est aisé de s'assurer que la matrice (3.7.22) peut réellement s'obtenir d'après les règles de la multiplication à gauche de la matrice A (α) par la matrice B (β), c'est-à-dire que

$$d_{ij}=\sum_{\sigma=1}^{3} b_{i\sigma}a_{\sigma j}, \tag{3.7.23}$$

où $b_{i\sigma}$ et $a_{\sigma j}$ sont les éléments des matrices (3.7.15) et (3.7.14).

Introduisons maintenant dans l'égalité symbolique (3.7.19) l'expression de Ξ' donnée par la formule (3.7.20) Il vient

$$\Xi = C(\gamma)\, B(\beta)\, A(\alpha)\, X. \tag{3.7.24}$$

Il est évident que la dernière égalité détermine la rotation finie du trièdre abc de la position xyz dans la position $\xi\eta\zeta$, qui résulte de trois rotations successives autour des arêtes a, b et c respectivement d'angles α, β et γ. Une telle rotation a été appelée, au § 5 de ce chapitre, déplacement angulaire de première espèce. Désignons sa matrice par P (α, β, γ). Alors l'égalité

$$\Xi = P(\alpha, \beta, \gamma)\, X \tag{3.7.25}$$

est l'écriture symbolique du déplacement angulaire de première espèce. La comparaison des formules (3.7.24) et (3.7.25) donne l'égalité symbolique

$$P(\alpha, \beta, \gamma) = C(\gamma)\, B(\beta)\, A(\alpha). \tag{3.7.26}$$

Représentons la matrice P (α, β, γ) sous la forme générale

$$P(\alpha, \beta, \gamma)=\begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Vmatrix}. \tag{3.7.27}$$

Ses éléments p_{ij} sont faciles à obtenir si l'on se reporte au § 5 du présent chapitre où, pour définir une rotation finie de première espèce, les angles des rotations successives du trièdre abc autour des arêtes a, b et c étaient désignés par α_1, β_1 et γ_1 et sa position d'arrivée par $\xi_1\eta_1\zeta_1$. En omettant les indices inférieurs dans la table (3.5.6) des cosinus des angles formés entre les axes des systèmes $\xi_1\eta_1\zeta_1$ et

xyz, on obtient la matrice suivante de déplacement angulaire ou, ce qui revient au même, de rotation finie de première espèce:

$$P = \left\| \begin{matrix} \cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + & -\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \\ & +\cos\alpha\sin\gamma & +\sin\alpha\sin\gamma \\ -\cos\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + \\ & +\cos\alpha\cos\gamma & +\sin\alpha\cos\gamma \\ \sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{matrix} \right\| . \quad (3.7.28)$$

Remarquons qu'on a ici, en particulier,

$$p_{23} = \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma + \sin\alpha \cos\gamma. \quad (3.7.29)$$

Le produit des matrices $B(\beta) A(\alpha)$ est, suivant la formule (3.7.21), la matrice $D(\alpha, \beta)$. L'égalité symbolique (3.7.26) peut donc se mettre sous la forme

$$P(\alpha, \beta, \gamma) = C(\gamma) D(\alpha, \beta). \quad (3.7.30)$$

Ainsi, la matrice $P(\alpha, \beta, \gamma)$ doit représenter le résultat de la multiplication à gauche de la matrice $D(\alpha, \beta)$ par la matrice $C(\gamma)$. On peut s'en assurer par des calculs directs. En particulier, étant donné les représentations des matrices $C(\gamma)$ et $D(\alpha, \beta)$ sous la forme (3.7.16) et (3.7.22), on a, en vertu de la règle (3.7.9) de la multiplication des matrices:

$$p_{23} = c_{21}d_{13} + c_{22}d_{23} + c_{23}d_{33} = \\ = -\sin\gamma(-\cos\alpha\sin\beta) + \cos\gamma\sin\alpha, \quad (3.7.31)$$

c'est-à-dire qu'on est conduit de nouveau à la formule (3.7.29).

Le produit matriciel étant associatif, on peut obtenir la matrice $P(\alpha, \beta, \gamma)$ par deux procédés: soit en multipliant à droite la matrice $C(\gamma)$ par la matrice $D(\alpha, \beta) = B(\beta) A(\alpha)$, soit en multipliant à droite le produit des matrices $C(\gamma) B(\beta)$ par la matrice $A(\alpha)$. En écriture symbolique ceci est représenté de la façon suivante

$$P(\alpha, \beta, \gamma) = C(\gamma)[B(\beta) A(\alpha)] = [C(\gamma) B(\beta)] A(\alpha). \quad (3.7.32)$$

Les propriétés mentionnées des produits matriciels peuvent, bien entendu, être vérifiées directement, dans le cas général de multiplication de trois matrices quelconques. Etant appliquées à la théorie des rotations finies, elles expriment un fait géométrique évident: une rotation finie, équivalente à trois rotations successives d'un trièdre autour de ses trois arêtes (ou plus généralement autour de trois droites quelconques rigidement liées au trièdre) peut également s'obtenir par suite de deux rotations successives, en particulier des rotations suivantes: premièrement, d'une rotation finie qui fait passer le trièdre de sa position de départ directement dans la deuxième position intermédiaire et ensuite de cette position dans la posi-

tion d'arrivée; deuxièmement, d'une rotation à partir de la position initiale dans la première position intermédiaire et ensuite de cette position directement dans la position d'arrivée.

On sait que le produit matriciel dépend de l'ordre dans lequel les matrices sont multipliées. En plus de la matrice $P(\alpha, \beta, \gamma)$ représentée sous la forme (3.7.26), considérons une matrice

$$Q(\alpha, \beta, \gamma) = C(\gamma) A(\alpha) B(\beta) \qquad (3.7.33)$$

pour les mêmes valeurs des angles α, β et γ. La matrice $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ correspond au déplacement angulaire du trièdre abc de la position de départ xyz dans une position d'arrivée $\xi\eta\zeta$ qui diffère de la position que prend le trièdre après la rotation correspondant à la matrice $P(\alpha, \beta, \gamma)$. Ceci signifie que pour des angles α et β non nuls on a

$$C(\gamma) A(\alpha) B(\beta) \neq C(\gamma) B(\beta) A(\alpha). \qquad (3.7.34)$$

Il est aisé de s'assurer que la matrice $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ caractérise un déplacement angulaire de deuxième espèce décrit au § 5 du présent chapitre, c'est-à-dire le résultat des rotations finies successives du trièdre abc de la position xyz dans la position $\xi_2\eta_2\zeta_2$ autour des arêtes b, a et c respectivement d'angles $\beta = \beta_2$, $\alpha = \alpha_2$ et $\gamma = \gamma_2$. Les éléments de la matrice $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ s'obtiennent facilement à partir de la table (3.5.11), lorsqu'on y omet les indices inférieurs.

Indiquons quelques règles d'opérations sur les matrices, qui sont utiles pour les applications à la théorie des rotations finies. Soit $A(\alpha)$ une matrice exprimée, comme précédemment, sous la forme (3.7.14) et correspondant au déplacement angulaire (3.7.17) du trièdre abc de la position xyz dans une position $x'y'z'$, par suite de la rotation d'angle α autour de l'arête a confondue avec les axes x et x', c'est-à-dire

$$X' = A(\alpha) X. \qquad (3.7.35)$$

Alors l'écriture symbolique

$$X^* = A(-\alpha) X' \qquad (3.7.36)$$

exprime la rotation finie du trièdre abc de la position $x'y'z'$ dans la position $x^*y^*z^*$, qui s'effectue de l'angle α autour de la même arête a confondue avec les axes x' et x^*, c'est-à-dire de l'angle α dans le sens des aiguilles d'une montre si la rotation est observée du côté de la partie positive de ces axes. Or, par suite d'une telle rotation, le trièdre abc revient dans sa position initiale, c'est-à-dire dans la position xyz. Ceci signifie que les axes x^*, y^*, z^* se confondent respectivement avec les axes x, y, z et qu'on a l'égalité symbolique

$$X = X^*. \qquad (3.7.37)$$

Introduisons dans le second membre de cette égalité l'expression de X^* donnée par la formule (3.7.36). Compte tenu de l'expression

(3.7.35) pour X', on obtient

$$X = A\,(-\alpha)\,A\,(\alpha)\,X. \tag{3.7.38}$$

Le produit $A\,(-\alpha)\,A\,(\alpha)$ représente une matrice appelée *matrice de rotation nulle* à laquelle correspond le déplacement nul du trièdre *abc* de sa position initiale *xyz*. Désignons cette matrice par E. Ainsi,

$$A\,(-\alpha)\,A\,(\alpha) = E. \tag{3.7.39}$$

Compte tenu de (3.7.14), il est facile de vérifier par des calculs que

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{3.7.40}$$

La matrice E est également appelée *matrice unité*. Il est évident que c'est l'unique matrice à laquelle correspond la table des cosinus des angles formés entre les axes de deux systèmes confondus et, en particulier, des systèmes *xyz* et $x^*y^*z^*$. Il n'est pas difficile de s'assurer de la validité des égalités symboliques suivantes, analogues à l'égalité (3.7.39):

$$B\,(-\beta)\,B\,(\beta) = E \tag{3.7.41}$$

et

$$C\,(-\gamma)\,C\,(\gamma) = E, \tag{3.7.42}$$

ainsi que des égalités symboliques de la forme

$$A\,(-\alpha)\,B\,(-\beta)\,C\,(-\gamma)\,C\,(\gamma)\,B\,(\beta)\,A\,(\alpha) = E. \tag{3.7.43}$$

Dans le dernier cas, il est inutile de faire des calculs concrets. Il suffit de faire usage des relations (3.7.39), (3.7.41) et (3.7.42), ainsi que de l'égalité

$$EK = KE = K, \tag{3.7.44}$$

où K est une matrice quelconque et E est la matrice unité (3.7.40).

Il résulte des égalités (3.7.43) et (3.7.26) que la matrice

$$R\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = A\,(-\alpha)\,B\,(-\beta)\,C\,(-\gamma) \tag{3.7.45}$$

correspond à la rotation finie qui fait revenir le trièdre *abc* dans sa position initiale après la rotation décrite par la matrice $P\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$. La comparaison des formules (3.7.26) et (3.7.45) montre que pour obtenir la matrice $R\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ il ne suffit pas de changer les signes des arguments de la matrice $P\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ représentée sous la forme (3.7.26). Il faut également changer l'ordre des matrices A, B et C à multiplier. Toutes ces opérations conduisent finalement à la transposition de la matrice $P\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$, c'est-à-dire au remplacement, dans son expression (3.7.28), de la première, de la deuxième et de la troisième ligne respectivement par la première, la deuxième et la troisième

colonne. En effet, la table des cosinus des angles formés entre les axes des systèmes de coordonnées $\xi\eta\zeta$ et xyz, qui correspond à la matrice $P(\alpha, \beta, \gamma)$ peut être représentée sous deux formes équivalentes

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ \xi & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ \eta & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ \zeta & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} & \xi & \eta & \zeta \\ x & p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ y & p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ z & p_{13} & p_{23} & p_{33}. \end{array} \tag{3.7.46}$$

D'après ce qui précède, on peut faire correspondre à ces tables deux égalités suivantes:

$$\Xi = P(\alpha, \beta, \gamma) X \quad \text{et} \quad X = R(\alpha, \beta, \gamma) \Xi. \tag{3.7.47}$$

Le rapprochement entre les deux tables (3.7.46) conduit immédiatement à la conclusion que

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = {}^tP(\alpha, \beta, \gamma). \tag{3.7.48}$$

Ici, ${}^tP(\alpha, \beta, \gamma)$ est la transposée de la matrice $P(\alpha, \beta, \gamma)$, c'est-à-dire la matrice obtenue (comme il vient d'être indiqué) par le remplacement de la première ligne de la matrice $P(\alpha, \beta, \gamma)$ par sa première colonne, de sa deuxième ligne par la deuxième colonne et de sa troisième ligne par la troisième colonne.

Les égalités (3.7.47) et (3.7.48) entraînent l'identité

$${}^tKK = K\,{}^tK = E, \tag{3.7.49}$$

où K est toute matrice de rotation finie, y compris la matrice $P(\alpha, \beta, \gamma)$.

De l'examen des formules (3.7.14) à (3.7.16) il découle immédiatement que

$$A(\alpha) = A(-\alpha), \quad {}^tB(\beta) = B(-\beta), \quad {}^tC(\gamma) = C(-\gamma). \tag{3.7.50}$$

Comme il a été dit au début du paragraphe précédent, la résolution des problèmes concrets de la géométrie des systèmes de commande et d'orientation se ramène essentiellement à la comparaison des tables, différemment établies, des cosinus des angles que font entre eux les axes des mêmes systèmes de coordonnées. En termes de calcul matriciel ceci signifie l'établissement de certaines égalités symboliques entre les matrices qui caractérisent des suites, différentes l'une de l'autre, des rotations finies. En conséquence, les éléments de ces matrices sont des fonctions des angles différemment introduits. C'est ainsi qu'au § 5 de ce chapitre nous avons établi trois variantes de la table des cosinus des angles formés entre les axes du système xyz lié au mobile et du système $\xi\eta\zeta$ stabilisé dans l'espace. A ces trois tables correspondent trois suites différentes de rotations finies dont les schémas sont représentés par les expressions symboliques

(3.5.16) à (3.5.18) établies au § 5 du présent chapitre. En écriture symbolique du calcul matriciel, on obtient

$$\begin{aligned} \Xi &= B(\gamma_1)\, C(\beta_1)\, A(\alpha_1)\, X, \\ \Xi &= A(-\gamma_2)\, C(-\beta_2)\, B(-\alpha_2)\, X, \end{aligned} \qquad (3.7.51)$$

ainsi que

$$X = C(-\varphi)\, A(-\vartheta)\, C(-\psi)\, \Xi. \qquad (3.7.52)$$

En se servant des égalités de la forme (3.7.43) et (3.7.44), on peut encore mettre la dernière expression sous la forme suivante:

$$\Xi = C(\psi)\, A(\vartheta)\, C(\varphi)\, X. \qquad (3.7.53)$$

Par matrices $B(\gamma_1)$, $C(-\beta_2)$, $A(-\vartheta)$ et autres matrices analogues intervenant dans les formules (3.7.51) à (3.7.53), on doit entendre des matrices dont la structure est la même que celle des matrices (3.7.15), (3.7.16) et (3.7.14). Il va de soi que dans ces dernières, c'est-à-dire dans les matrices $B(\beta)$, $C(\gamma)$, $A(\alpha)$, les arguments β, γ, α doivent être remplacés respectivement par γ_1, $-\beta_2$, $-\vartheta$, etc.

Les expressions (3.7.51) et (3.7.53) entraînent les égalités matricielles suivantes:

$$B(\gamma_1)\, C(\beta_1)\, A(\alpha_1) = A(-\gamma_2)\, C(-\beta_2)\, B(-\alpha_2), \qquad (3.7.54)$$

$$A(-\gamma_2)\, C(-\beta_2)\, B(-\alpha_2) = C(\psi)\, A(\vartheta)\, C(\varphi). \qquad (3.7.55)$$

Deux matrices sont égales si sont égaux tous leurs éléments correspondants. Des égalités matricielles (3.7.54) et (3.7.55) il résulte donc 18 relations entre les angles α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, ψ, ϑ et φ. Or, il n'y a que six d'entre elles qui sont indépendantes, vu que pour toute matrice de rotation finie on ne peut établir que six relations différentes entre ses éléments, indépendantes l'une de l'autre. Ce sont les mêmes relations qui lient les éléments d'une table des cosinus des angles formés entre les axes de deux systèmes de coordonnées rectangulaires quelconques. Ainsi, on ne peut obtenir des égalités (3.7.54) et (3.7.55) que six relations indépendantes qui font intervenir neuf angles sus-mentionnés: α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, ψ, ϑ et φ. Ces relations indépendantes peuvent être considérées comme équations permettant de déterminer six quelconques des angles énumérés lorsque les trois autres sont donnés. Ainsi, par exemple au cours du § 5 de ce chapitre, les angles donnés étaient α_1, β_1 et α_2, les six autres étant des angles cherchés. Parmi ces derniers, seuls les angles ψ et ϑ présentaient un intérêt pratique car ils caractérisaient l'orientation de l'axe longitudinal z du mobile par rapport aux axes du système non tournant $\xi\eta\zeta$.

Avant de clore ce paragraphe, exposons en termes de calcul matriciel la position et la résolution du problème examiné au § 1, chap. I. On y considérait deux suspensions à la cardan dont les axes

y_1 et x_1^* des anneaux extérieurs étaient perpendiculaires entre eux, l'axe y_1 étant parallèle à l'axe longitudinal y du navire et l'axe x_1^* parallèle à l'axe transversal x du navire. On a lié au navire un système de coordonnées xyz, aux anneaux de cardan extérieurs des systèmes $x_1y_1z_1$ et $x_1^*y_1^*z_1^*$ et aux anneaux de cardan intérieurs des systèmes $\xi\eta\zeta$ et $\xi^*\eta^*\zeta^*$. Tenons compte des règles, adoptées au § 1, chap. I, sur les signes des angles θ et ψ^* de rotation des anneaux de cardan extérieurs par rapport au navire et des angles ψ et θ^* de rotation des anneaux de cardan intérieurs par rapport aux anneaux extérieurs. D'après ce qui a été établi au § 5 du présent chapitre, les schémas des rotations finies des anneaux de la suspension à la cardan se présentent donc sous la forme suivante:

$$xyz \xrightarrow[-\theta]{y,\ y_1} x_1y_1z_1 \xrightarrow[\psi]{x_1,\ \xi} \xi\eta\zeta \tag{3.7.56}$$

et

$$xyz \xrightarrow[\psi^*]{x,\ x^*} x_1^*y_1^*z_1^* \xrightarrow[-\theta^*]{y_1^*,\ \eta^*} \xi^*\eta^*\zeta^*. \tag{3.7.57}$$

Le problème consistait à rechercher l'angle χ de la rotation relative des anneaux de cardan intérieurs, c'est-à-dire des plates-formes stabilisées, dans l'hypothèse où les axes ζ et ζ^* qui leur sont liés, sont parallèles. Le sens de parcours positif de l'angle χ étant choisi comme dans ce paragraphe, on obtient le schéma suivant de la rotation finie du trièdre abc de la position $\xi\eta\zeta$ dans la position $\xi^*\eta^*\zeta^*$:

$$\xi\eta\zeta \xrightarrow[-\chi]{\zeta,\ \zeta^*} \xi^*\eta^*\zeta^*. \tag{3.7.58}$$

Les schémas (3.7.56) à (3.7.58) correspondent aux égalités symboliques

$$\Xi = A(\psi)\, B(-\theta)\, X, \tag{3.7.59}$$

$$\Xi^* = B(-\theta^*)\, A(\psi^*)\, X, \tag{3.7.60}$$

$$\Xi^* = C(-\chi)\, \Xi. \tag{3.7.61}$$

En introduisant dans l'égalité (3.7.61) l'expression (3.7.59) de Ξ, on obtient

$$\Xi^* = C(-\chi)\, A(\psi)\, B(-\theta)\, X. \tag{3.7.62}$$

La comparaison des égalités (3.7.62) et (3.7.60) donne maintenant la relation

$$B(-\theta^*)\, A(\psi^*) = C(-\chi)\, A(\psi)\, B(-\theta). \tag{3.7.63}$$

Il en résulte neuf égalités algébriques dont trois seulement sont indépendantes. La relation (3.7.63) faisant intervenir cinq angles: ψ, θ, χ, ψ^*, θ^*, trois quelconques, entre eux peuvent être déterminés lorsque les deux autres sont connus. C'est ainsi qu'au § 1

du chap. I, en sachant les angles ψ et θ se rapportant à la première suspension à la cardan, on cherchait l'angle χ de rotation relative des anneaux de cardan intérieurs et les angles ψ^* et θ^* liés à la seconde suspension à la cardan.

Certaines équations matricielles permettent d'effectuer des transformations qui s'avèrent, dans plusieurs cas, bien utiles pour obtenir des relations algébriques commodes entre les variables que ces équations contiennent. C'est ainsi par exemple qu'en multipliant à gauche les deux membres de l'égalité (3.7.63) par la matrice $C(\chi)$ et en tenant compte de l'égalité

$$C(\chi)\,C(-\chi) = E \qquad (3.7.64)$$

et de l'égalité (3.7.44), on peut mettre l'équation matricielle (3.7.63) sous une nouvelle forme:

$$C(\chi)\,B(-\theta^*)\,A(\psi^*) = A(\psi)\,B(-\theta). \qquad (3.7.65)$$

On pourrait également multiplier à droite les deux membres de l'égalité (3.7.63): d'abord par la matrice $B(\theta)$ et ensuite par la matrice $A(-\psi)$. Compte tenu des identités (3.7.39) et (3.7.41), on serait conduit dans ce cas à l'équation matricielle

$$B(-\theta^*)\,A(\psi^*)\,B(\theta)\,A(-\psi) = C(-\chi) \qquad (3.7.66)$$

dont le second membre ne comprend qu'une seule inconnue χ.

L'application du calcul matriciel permet d'algorithmiser dans une certaine mesure l'établissement des équations lors de la résolution des problèmes géométriques de l'orientation des mobiles stabilisés. Dans ces conditions, les calculs se réduisent essentiellement à la multiplication des matrices et exigent un emploi minimal de constructions géométriques, ce qui diminue, en règle générale, la probabilité des conclusions erronées. Quant aux exemples numériques, la multiplication des matrices peut être effectuée avec succès sur des ordinateurs rapides d'après des programmes tout prêts.

BIBLIOGRAPHIE

Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики, ч. 1, 2 (*N. Boukholtz.* Cours fondamental de mécanique rationnelle, parties 1, 2). М., « Наука », 1972 (en russe).

Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике (*F. Gantmacher.* Conférences sur la mécanique analytique). М., Физматгиз, 1960 (en russe).

Евгеньев В. С. О кардановой погрешности курсового гироскопа при нерегулярной качке (*V. Evguéniev.* Sur l'erreur de cardan d'un gyroscope directionnel en roulis et en tangage irréguliers). — Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение, 1969, т. 12, № 9 (en russe).

Ишлинский А. Ю. Механика специальных гироскопических систем (*A. Ishlinsky.* Mécanique des systèmes gyroscopiques spéciaux). Киев, Изд-во АН УССР, 1952 (en russe).

Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем (*A. Ishlinsky.* Mécanique des systèmes gyroscopiques). M., Изд-во АН СССР, 1963 (en russe).
Ишлинский А. Ю. Об азимутальном рассогласовании кардановых подвесов (*A. Ishlinsky.* Sur le désaccord en azimut des suspensions à la cardan). — Инж. ж. МТТ, 1966, № 3 (en russe).
Литвин-Седой М. З. Введение в механику управляемого полета (*M. Litvine-Sedoï.* Introduction à la mécanique d'un vol guidé). M., « Высш. школа », 1962 (en russe).
Остромухов Я. Г., Ривкин С. С., Темченко М. Е. Геометрия и кинематика систем гироскопической стабилизации (*Ya. Ostromoukhov, S. Rivkine, M. Temtchenko.* Géométrie et cinématique des systèmes de gyrostabilisation). — Dans le recueil : Развитие механики гироскопических и инерциальных систем (Développement de la mécanique des systèmes gyroscopiques et inertiels). M., « Наука », 1973 (en russe).
Подобрий Г. М., Белобородый В. С., Халимонов В. В., Носов А. И. Теоретические основы торпедного оружия (*G. Podobri, V. Béloborodyï, V. Khalimonov, A. Nossov.* Bases théoriques des armes torpilles). M., Воениздат, 1969 (en russe).
Ривкин С. С. Применение методов теории матриц к анализу геометрии гироскопических устройств (*S. Rivkine.* Application des méthodes de la théorie des matrices à l' analyse de la géométrie des dispositifs gyroscopiques). — Dans le recueil : Вопросы прикладной гироскопии, вып. 2 (Questions de la gyroscopie appliquée, fasc. 2). Л., Судпромгиз, 1960 (en russe).
Broxmeyer C. Inertial navigation systems. N. Y. e. a. McGraw-Hill, 1964.
Gantmacher F. R. Théorie des matrices. Dunod, 1966 (traduit du russe).
Korn G., Korn T. Mathematical handbook for scientists and engineers. N. Y., McGraw-Hill, 1961.

CHAPITRE IV

ORIENTATION DES MOBILES COMMANDÉS PAR DES SYSTÈMES À LIAISONS NON HOLONOMES

§ 1. Sur le mouvement quasi non holonome d'un stabilisateur gyroscopique à un axe

La détermination de l'orientation des mobiles commandés par des gyroscopes se ramène en règle générale à l'analyse des équations de liaisons entre les paramètres (les angles par exemple) dont les valeurs dépendent de la position des éléments sensibles tant par rapport aux points cardinaux (ou par rapport à un système de coordonnées quelconque stabilisé dans l'espace) que par rapport au mobile lui-même. Les liaisons qui ont été examinées plus haut s'exprimaient par les équations trigonométriques (et parfois algébriques), bien souvent assez compliquées. On dit généralement de ces liaisons qu'elles sont *géométriques*.

Dans le cas où les systèmes de commande des mobiles comportent des dispositifs utilisant plusieurs gyroscopes (par exemple, une plateforme à deux gyroscopes, v. plus loin, fig. 105) ou des stabilisateurs gyroscopiques à correction dite forte (v. fig. 94 et plus loin fig. 125), ces paramètres se trouvent liés par des équations différentielles du premier ordre. Ces dernières s'obtiennent lorsqu'on néglige des termes dits *de nutation* (v. tome II, chap. II, § 1) dans les équations différentielles exactes initiales se rapportant aux dispositifs gyroscopiques. En le faisant, on obtient, au lieu d'un système d'équations différentielles du deuxième ordre, un système comprenant le même nombre d'équations différentielles, dont chacune est du premier ordre. Ces dernières sont appelées *équations de la théorie de précession* ou *de la théorie élémentaire des gyroscopes.*

L'examen des problèmes relatifs au mouvement des dispositifs gyroscopiques à l'aide des équations différentielles complètes (c'est-à-dire compte tenu des termes de nutation) confirme généralement (à l'exception de l'étude des questions de stabilité) la validité des résultats obtenus par la résolution des équations de la théorie de précession. Ceci s'explique par le fait qu'au fond les solutions des équations « raccourcies » ou de précession ne peuvent pas décrire que des vibrations rapidement disparaissantes qui prennent naissance dans les dispositifs gyroscopiques stables sous l'effet de brusques variations des forces auxquelles ils sont soumis.

Dans bien des cas, certaines des équations « raccourcies » sont de même caractère que les relations entre les coordonnées généralisées ou entre les paramètres d'un système mécanique présentant des liaisons non holonomes [1]). Ces équations raccourcies portent le nom de relations des liaisons *quasi non holonomes*. Nous allons examiner au cours de ce chapitre quelques exemples de liaisons quasi non holonomes dont le plus simple est fourni par un stabilisateur gyroscopique à un axe à correction dite forte (v. fig. 94) si son mouvement est considéré du point de vue de la théorie de précession des gyroscopes.

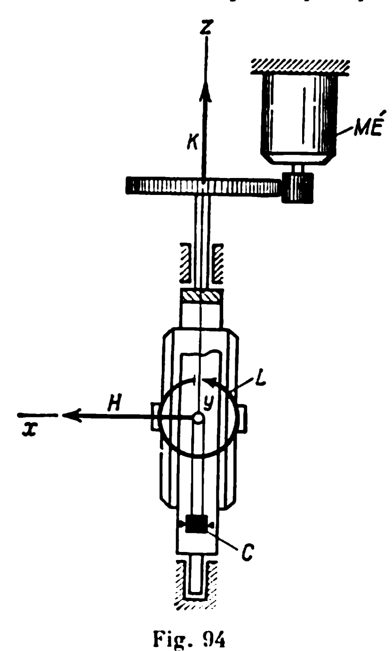


Fig. 94

Envisageons un gyroscope suspendu à la cardan, installé sur un support mobile. Les paliers de l'axe de l'anneau de cardan extérieur du gyroscope sont rigidement reliés au support (v. fig. 94). On applique à cet axe (par exemple depuis un moteur électrique *ME* commandé par un dispositif à contacts *C*, à travers un train d'engrenages) un moment *K* appelé moment de stabilité. Ce dernier doit provoquer une précession si intense (une correction « forte ») du gyroscope autour de l'axe du boîtier, que l'axe du rotor se confonde pratiquement en permanence avec la perpendiculaire au plan de l'anneau de cardan extérieur, quel que soit le mouvement angulaire du support.

Introduisons deux systèmes de coordonnées xyz et $x'y'z'$ liés respectivement à l'anneau extérieur de la suspension à la cardan du gyroscope et à son boîtier et ayant une origine commune au centre de la suspension (fig. 95). Dirigeons les deux axes y et y' le long de l'axe du boîtier, l'axe z suivant l'axe de l'anneau de cardan extérieur et l'axe x' le long du vecteur moment cinétique propre H du gyroscope. La position des axes x et z' sera par là même déterminée, elle aussi. Désignons par β l'angle des axes x et x'.

---

[1]) Un exemple de liaison non holonome est fourni par le roulement sans glissement d'une sphère sur un plan fixe. Le point de contact de la sphère avec le plan ayant la vitesse instantanée nulle, il en résulte deux équations différentielles du premier ordre qui relient les coordonnées généralisées caractérisant la position du centre de la sphère, ainsi que son orientation, aux dérivées premières de ces coordonnées (c'est-à-dire aux vitesses généralisées).

D'après ce qui précède, l'angle β peut être posé égal à zéro grâce à l'action du moment K. Ainsi, admettons que

$$\beta = 0 \tag{4.1.1}$$

et donc que les axes de même nom des systèmes xyz et $x'y'z'$ se confondent de tout temps.

Suivant la théorie de précession des gyroscopes (v. tome II, chap. II), les composantes de la vitesse de l'extrémité du vecteur H (fig. 96) le long des axes x', y' et z' sont égales respectivement à $M'_{x'}$, $M'_{y'}$, $M'_{z'}$, où $M'_{x'}$, $M'_{y'}$ et $M'_{z'}$ sont les moments, par rapport aux mêmes axes, des forces agissant sur l'ensemble mécanique « rotor-boîtier ». Il en résulte que

$$0 = M'_{x'}, \quad \omega'_{z'}H = M'_{y'}, \quad -\omega'_{y'}H = M'_{z'}. \tag{4.1.2}$$

Les axes des systèmes xyz et $x'y'z'$ étant confondus, leurs vitesses angulaires ω et ω' sont égales. On a donc en particulier

$$\omega'_{y'} = \omega_y, \quad \omega'_{z'} = \omega_z. \tag{4.1.3}$$

Introduisons pour $M'_{y'}$ une désignation abrégée (v. fig. 94)

$$M'_{y'} = L. \tag{4.1.4}$$

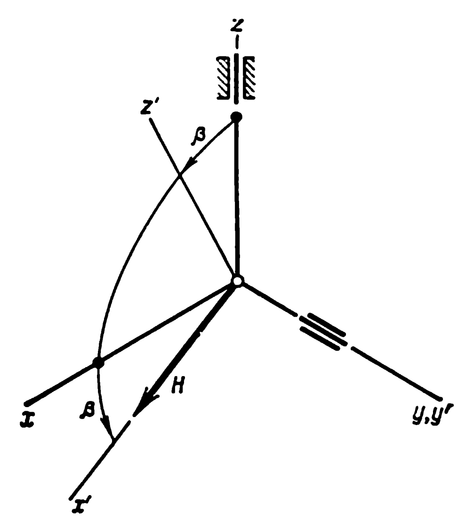


Fig. 95

De plus, lorsque $\beta = 0$, il convient de considérer que

$$M'_{z'} = K. \tag{4.1.5}$$

La dernière égalité nécessite une explication car le moment K est appliqué à l'axe de l'anneau de cardan extérieur du gyroscope, alors que le moment $M'_{z'}$ s'exerce sur le sous-système mécanique « boîtier-rotor » (v. tome II, chap. II, § 3). Admettons que le moment $M'_{z'}$ caractérise l'action de l'anneau de cardan extérieur sur le boîtier (c'est-à-dire que les forces extérieures qui pourraient s'exercer sur le sous-système « boîtier-rotor » sont nulles). Il s'ensuit en vertu du principe de Newton sur l'égalité de l'action et de la réaction que l'anneau de cardan extérieur sera soumis, en plus du moment K, encore au moment $-M'_{z'}$ de sens contraire à celui de $M'_{z'}$. Etant donné que dans la théorie de précession des gyroscopes la masse de l'anneau de cardan extérieur du gyroscope est négligée, on doit poser que toutes les forces appliquées à l'anneau de cardan extérieur constituent

un système équilibré. Les moments K et $-M'_{z'}$ sont dirigés suivant une même droite qui est l'axe z (ou, ce qui revient au même, l'axe z'). En vertu des équations d'équilibre d'un système de forces dans l'espace on a

$$K+(-M'_{z'})=0, \qquad (4.1.6)$$

d'où il résulte l'égalité (4.1.5).

Compte tenu des égalités (4.1.3) à (4.1.5), les équations (4.1.2) donnent maintenant les relations

$$-\omega_y H = K, \quad \omega_z H = L, \qquad (4.1.7)$$

où ω_y et ω_z sont comme précédemment les projections sur les axes y et z de la vitesse angulaire de l'anneau de cardan extérieur du gyroscope ou, ce qui revient au même, du système de coordonnées xyz.

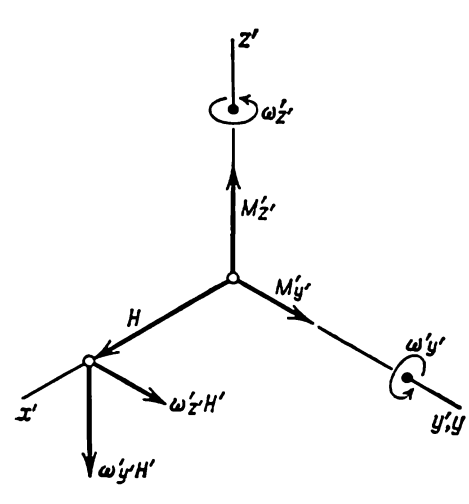


Fig. 96

Dans le cas d'un stabilisateur gyroscopique à un axe, le moment résultant par rapport à l'axe y' du boîtier (confondu avec l'axe y) de toutes les forces appliquées au sous-système « boîtier-rotor » est réduit à une valeur négligeable grâce à un équilibrage parfait et à l'emploi des paliers de très haute qualité pour l'axe du boîtier. Vu cette circonstance, posons dans la deuxième relation (4.1.7) le moment L égal à zéro. On obtient ainsi l'égalité

$$\omega_z = 0 \qquad (4.1.8)$$

qui exprime la propriété fondamentale du stabilisateur gyroscopique à un axe : la projection de la vitesse angulaire de l'anneau de cardan extérieur du gyrostabilisateur sur l'axe de cet anneau est nulle. Ceci étant, on suppose que l'égalité (4.1.1) est constamment satisfaite.

L'anneau de cardan extérieur du gyroscope étant un corps solide, son orientation par rapport à un système non tournant quelconque $\xi\eta\zeta$ peut se déterminer par trois paramètres, notamment par les angles d'Euler ou les angles d'Euler-Krylov (v. chap. III, §§ 5 et 6). La projection de la vitesse angulaire d'un solide sur un axe quelconque qui lui est lié, et en particulier la projection de la vitesse angulaire de l'anneau de cardan extérieur sur l'axe z, s'exprime par les dérivées de ces angles par rapport au temps et par les angles eux-

mêmes. L'égalité (4.1.8) peut donc être considérée comme une condition de liaison non holonome imposée au mouvement du corps solide, en l'occurrence, au mouvement de l'anneau extérieur de la suspension à la cardan.

L'existence de liaison non holonome (4.1.8) confère des propriétés géométriques importantes au mouvement correspondant du solide. Supposons par exemple que l'axe z de l'anneau de cardan extérieur effectue un mouvement conique au cours duquel un des points de l'axe est fixe alors qu'un autre décrit une courbe fermée sur une sphère non tournante S, ayant son centre au premier point (fig. 97).

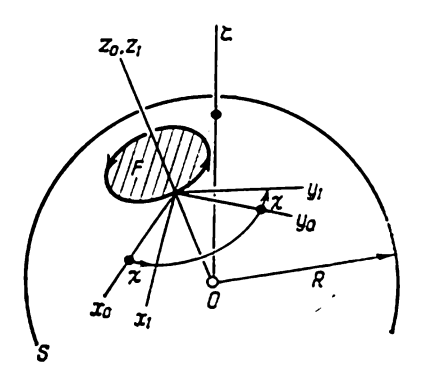


Fig. 97

Désignons par F l'aire de la surface sphérique limitée par cette courbe. Il sera montré plus loin que lorsque l'axe z revient dans sa position initiale z_0, l'anneau de cardan extérieur prend avec le système de coordonnées xyz, qui lui est lié, une nouvelle position $x_1y_1z_1$ différant de sa position initiale $x_0y_0z_0$; l'angle χ dont se trouve tourné dans ce cas l'anneau de cardan extérieur (et par suite le système $x_1y_1z_1$ par rapport au système $x_0y_0z_0$, v. fig. 97) est lié, au signe près, à l'aire de la surface F par une simple relation

$$\chi = \frac{F}{R^2} \tag{4.1.9}$$

dans laquelle R est le rayon de la sphère S.

Le rapport au second membre de la dernière égalité est la mesure de l'angle solide Ω sous lequel la surface sphérique mentionnée est vue du centre de la sphère S ou, ce qui revient au même, la mesure de l'angle solide du cône décrit par l'axe au cours de son mouvement. Il en résulte la formule

$$\chi = \Omega \tag{4.1.10}$$

qui détermine la rotation d'un stabilisateur gyroscopique à un axe, en particulier d'un azimut gyroscopique (v. tome II, chap. V, § 6), par suite d'un mouvement angulaire fermé de l'axe de son anneau de cardan extérieur (axe de stabilisation). Ainsi, la valeur nulle de la projection de la vitesse angulaire du solide sur un axe quelconque qui lui est lié ne garantit pas encore l'absence de rotation finie du corps autour de cet axe après le retour de celui-ci dans sa position initiale. Il résulte de ce qui précède que les stabilisateurs à un axe ne peuvent être utilisés pour fixer les directions dans le plan horizontal

qu'à condition de conserver, à bord du mobile, l'orientation verticale de l'axe de l'anneau de cardan extérieur (à une prise en compte de la courbure de la surface de la Terre près). Dans de tels cas ils sont appelés gyroscopes de direction ou azimuts gyroscopiques[1]).

Proposons-nous maintenant de démontrer l'égalité (4.1.10). Introduisons un système de coordonnées non tournant $\xi\eta\zeta$, en plaçant son origine au centre de la sphère S (fig. 98). Supposons que l'axe z de l'anneau de cardan extérieur du stabilisateur effectue un mouvement quelconque, en passant constamment par le centre de la sphère.

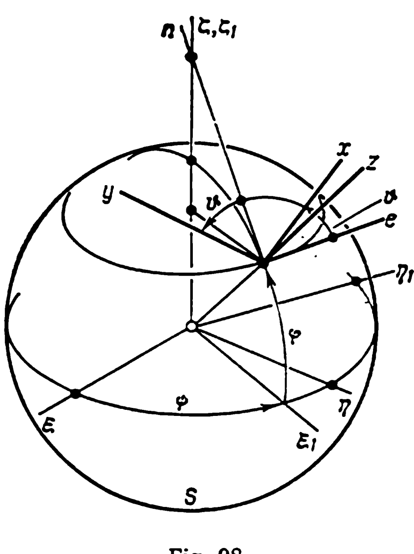


Fig. 98

Désignons par ψ et φ les coordonnées polaires du point d'intersection de cet axe avec la sphère S. Ici φ est l'angle fait par l'axe z avec sa projection ξ_1 sur le plan $\xi\eta$, et ψ l'angle formé entre cette projection et l'axe de direction constante ξ. Le déplacement en translation du stabilisateur étant sans importance pour notre analyse, plaçons l'origine du système de coordonnées xyz lié à son anneau de cardan extérieur au point d'intersection de l'axe de cet anneau avec la sphère S. Introduisons ensuite un système de coordonnées mobile auxiliaire enz ayant son origine au même point d'intersection. L'axe n de ce système est situé dans le plan $z\zeta$ ou, ce qui revient au même, dans le plan $\xi_1\zeta$ qui est perpendiculaire à l'axe e. Le sens positif de l'axe z des deux systèmes xyz et enz est pris suivant le prolongement du rayon de la sphère mené au point sus-mentionné. Si l'angle ψ augmente, le système enz tourne en sens inverse des aiguilles d'une montre autour de l'axe ζ ; lorsque l'angle φ augmente, il tourne dans le sens des aiguilles d'une montre autour de l'axe η_1 qui passe par le centre de la sphère et est parallèle à l'axe e (fig. 98

---

[1]) En parcourant, sur la surface terrestre, la courbe limitant la surface d'aire F, le gyroscope de direction subit un écart supplémentaire (en plus de la dérive apparente par suite de la rotation de la Terre) de l'angle χ exprimé par la formule (4.1.9) dans laquelle on doit maintenant entendre par R le rayon de la Terre supposée sphérique. Ainsi, les gyroscopes de haute précision permettent théoriquement non seulement de déceler la sphéricité de la Terre mais également de mesurer son rayon.

et 99). Les projections de la vitesse angulaire u du système *enz* sur ses axes s'expriment donc par les formules

$$u_e = -\frac{d\varphi}{dt}, \quad u_n = \frac{d\psi}{dt}\cos\varphi, \quad u_z = \frac{d\psi}{dt}\sin\varphi. \qquad (4.1.11)$$

Introduisons un angle ϑ des axes e et x ou un angle, qui lui est égal, des axes n et y (v. fig. 98 et 100). Si l'angle ϑ augmente, le système xyz tourne en sens inverse des aiguilles d'une montre par rapport au système *enz*, la rotation étant observée du côté de la partie positive de l'axe z. Par conséquent, la vitesse angulaire (relative) $d\vartheta/dt$

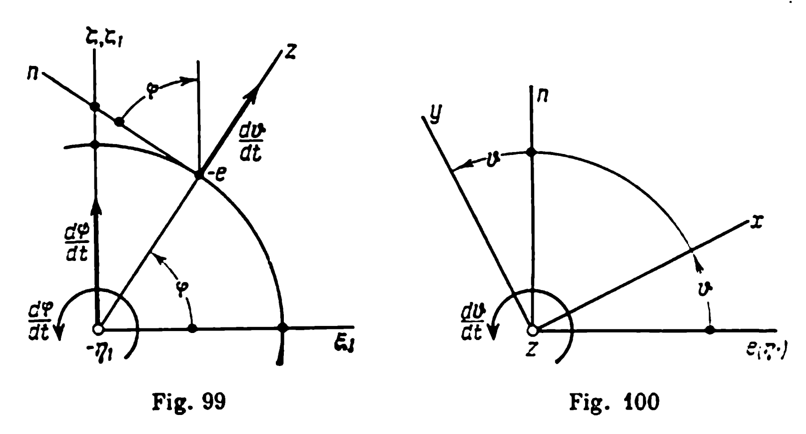


Fig. 99 Fig. 100

du système xyz par rapport au système mobile auxiliaire *enz* est dirigée le long de la partie positive de l'axe z. Ceci étant la projection sur l'axe z de la vitesse angulaire absolue (c'est-à-dire par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi\eta\zeta$) de l'anneau de cardan extérieur du stabilisateur et du système xyz, qui lui est lié (v. fig. 99) est donnée par

$$\omega_z = \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\sin\varphi. \qquad (4.1.12)$$

Or, d'après la propriété fondamentale du stabilisateur gyroscopique à un axe traduite par la formule (4.1.8), la dernière expression est égale à zéro. Ainsi, l'égalité

$$\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\sin\varphi = 0 \qquad (4.1.13)$$

constitue une représentation analytique de la liaison non holonome imposée aux mouvements angulaires du stabilisateur à un axe. Elle n'est valable, bien entendu, que dans le cadre de la théorie de précession des gyroscopes.

De l'égalité (4.1.13) on déduit que

$$d\vartheta = -\sin\varphi\, d\psi. \qquad (4.1.14)$$

Déterminons maintenant l'angle dont tournera, par rapport au système mobile auxiliaire *enz*, le système *xyz* lié à l'anneau de cardan extérieur du stabilisateur, lorsque l'axe *z* se déplace d'une position dans une autre. Soient ψ_0, φ_0 et ψ_1, φ_1 les coordonnées polaires de l'origine commune des systèmes *xyz* et *enz*, c'est-à-dire du point d'intersection de l'axe de l'anneau de cardan extérieur du stabilisateur avec la sphère, lesquelles correspondent respectivement à ses positions de départ et d'arrivée. Ceci étant désignons par ϑ_0 et ϑ_1 les valeurs initiale et finale de l'angle ϑ formé entre les axes *e* et *x*. La relation (4.1.14) implique la formule

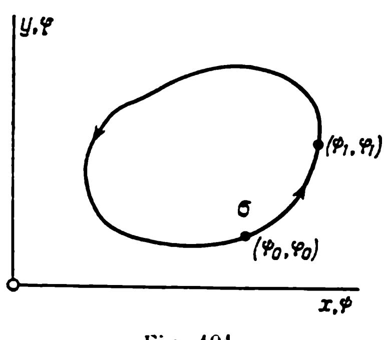


Fig. 101

$$\vartheta_1 - \vartheta_0 = -\int_{\psi_0,\,\varphi_0}^{\psi_1,\,\varphi_1} \sin\varphi \, d\psi \qquad (4.1.15)$$

dont le second membre est une intégrale curviligne, considérée dans le plan auxiliaire (ψ, φ) des variables ψ et φ (fig. 101). La valeur de cette intégrale dépend, dans une large mesure, de la trajectoire sphérique suivant laquelle l'origine du système *xyz* (donc, du système *enz*) passe d'une position dans une autre, c'est-à-dire de la fonction $\varphi = \varphi(\psi)$ correspondant à cette trajectoire. Remarquons que le caractère de variation dans le temps des angles ψ et φ ne joue dans ce cas aucun rôle important [1]).

Supposons que l'origine du système de coordonnées *xyz* revient dans sa position initiale après avoir décrit sur la sphère une courbe fermée. En introduisant pour ce cas la désignation

$$\chi = \vartheta_1 - \vartheta_0, \qquad (4.1.16)$$

on obtient alors la formule

$$\chi = -\oint \sin\varphi \, d\psi. \qquad (4.1.17)$$

Le second membre de la dernière égalité est une intégrale curviligne suivant une courbe fermée (v. fig. 101) située dans le même plan auxiliaire (ψ, φ). Il résulte de ce qui vient d'être exposé que l'angle χ donné par la formule (4.1.17) caractérise le changement d'orientation du stabilisateur gyroscopique, dû au mouvement de l'axe *z* de son

[1]) La dernière proposition, de même que l'égalité (4.1.13), n'est valable que dans le cadre de la théorie de précession des gyroscopes. Pour une position rigoureuse de ce problème, il faut partir des équations complètes (équations de nutation) du stabilisateur gyroscopique. (Voir, par exemple : *А. Ю. Ишлинский*. Механика гироскопических систем. М., Изд-во АН СССР, 1963 (*A. Ishlinsky*. Mécanique des systèmes gyroscopiques) (en russe)).

anneau de cardan extérieur suivant une surface conique fermée ou, ce qui revient au même, au mouvement de l'origine du système xyz suivant une courbe sphérique fermée.

Considérons un cas particulier de mouvement de l'origine du système xyz suivant un « rectangle » sphérique fermé dont les sommets successifs (fig. 102) sont A (ψ_0, φ_0), B (ψ_1, φ_0), C (ψ_1, φ_1),

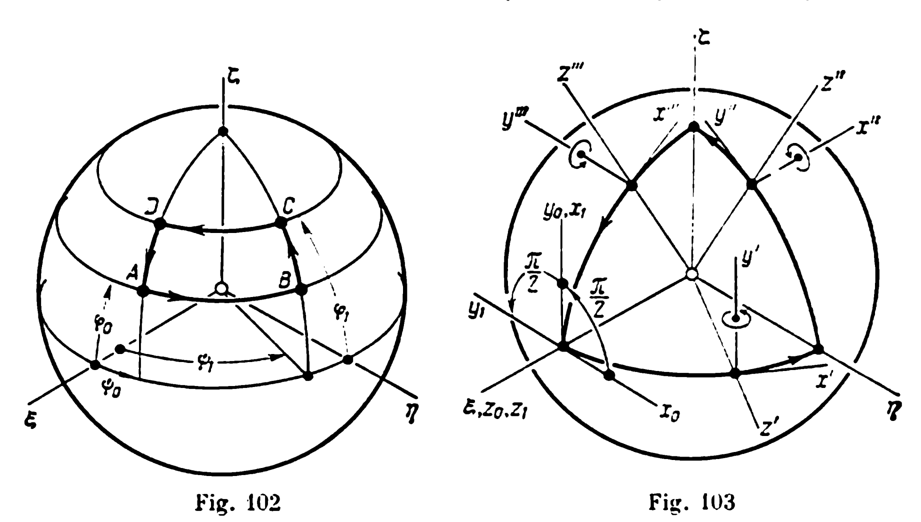


Fig. 102 Fig. 103

D (ψ_0, φ_1) et de nouveau A (ψ_0, φ_0). Il est évident que sur les parallèles AB et CD la fonction à intégrer intervenant dans la formule (4.1.17) est constante et égale respectivement à $\sin \varphi_0$ et $\sin \varphi_1$ et que sur les méridiens BC et DA c'est la coordonnée ψ qui est constante et donc $d\psi = 0$. Aussi, en tenant également compte du signe négatif de la différentielle $d\psi$ lors du mouvement sur le côté CD, peut-on écrire

$$\chi = (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0)(\psi_1 - \psi_0). \qquad (4.1.18)$$

D'autre part, la stéréométrie nous apprend que l'aire du rectangle sphérique $ABCD$ ainsi situé est égale au produit par R^2 du second membre de la dernière formule. Conformément à la note sur la formule (4.1.9), ce membre représente donc la mesure de l'angle solide décrit par l'axe z au cours de son mouvement que nous venons de considérer. Dans un cas plus particulier, on peut envisager le mouvement de l'origine du système xyz suivant le contour de l'octant, c'est-à-dire sur les trois arcs de grands cercles dont chacun est égal à un quart de la circonférence (fig. 103). Dans la formule (4.1.18) il convient dans ce cas de poser $\psi_1 - \psi_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = \pi/2$. On obtient $\chi = \pi/2$, ce qui constitue exactement une huitième de 4π, c'est-à-dire de l'angle solide sous lequel toute la sphère est vue

de son centre, ainsi que de n'importe lequel de ses points intérieurs. On peut s'en assurer directement si l'on considère le mouvement de l'origine du système xyz successivement sur les trois arcs, en imposant chaque fois au mouvement la condition (4.1.8) (v. fig. 103).

En partant de la formule (4.1.18), on peut justifier la formule (4.1.10) dans le cas le plus général, au moyen de simples passages à la limite. Pourtant, il est plus facile de le faire à l'aide de la formule de Green

$$\oint P\,dx + Q\,dy = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{4.1.19}$$

qui transforme une intégrale curviligne suivant un contour fermé dans le plan xy en une intégrale double étendue à un domaine σ

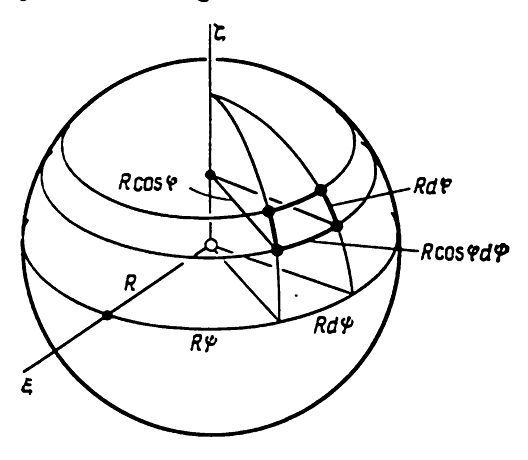


Fig. 104

se trouvant à l'intérieur de ce contour (v. fig. 101). Ceci étant, le contour est à parcourir dans le sens pour lequel le domaine se trouve toujours à gauche. Revenons au plan auxiliaire (ψ, φ) et posons dans la formule (4.1.19)

$$x = \psi, \quad y = \varphi, \quad P = -\sin\varphi, \quad Q = 0. \tag{4.1.20}$$

Avec les nouvelles désignations, la formule de Green donne

$$\oint (-\sin\varphi)\,d\psi = \iint \cos\varphi\,d\varphi\,d\psi. \tag{4.1.21}$$

Or, le produit

$$R^2 \cos\varphi\,d\varphi\,d\psi = dF \tag{4.1.22}$$

représente un élément de surface de la sphère en coordonnées polaires ou, ce qui revient au même, l'aire d'un rectangle sphérique élémen-

taire compris entre les lignes de coordonnées ψ et $\psi + d\psi$, φ et $\varphi + d\varphi$ (fig. 104), dont les côtés sont égaux respectivement à $R \cos \varphi \times d\psi$ et $R d\varphi$. Par conséquent, l'intégrale double figurant au second membre de l'égalité (4.1.21) représente le quotient par R^2 de l'aire F de la partie de la sphère S se trouvant à l'intérieur de la trajectoire sphérique fermée décrite par l'origine du système xyz. Le rapport de l'aire F au carré du rayon R constituant précisément une mesure de l'angle solide Ω sous lequel cette surface est vue du centre de la sphère, on a

$$\oint (-\sin \varphi)\, d\psi = \Omega. \qquad (4.1.23)$$

En remplaçant maintenant dans la formule (4.1.17) l'intégrale curviligne par son expression suivant la dernière relation, on retrouve l'égalité (4.1.10) qui est ainsi démontrée dans le cas général [1]).

Exemple numérique. — On considère un axe z rigidement lié au corps et effectuant un mouvement en glissant suivant un rectangle sphérique $ABCD$. Ce rectangle est adjacent à l'équateur de la sphère S, c'est-à-dire à la ligne $\varphi = 0$ (v. fig. 102 qu'il convient de modifier par la pensée de telle sorte que $\varphi_0 = 0$), les dimensions angulaires des côtés AB et BC étant égales à 1°. Conformément à la formule (4.1.18), nous avons dans ce cas $\chi = \sin 1° \cdot 0{,}01745 = 0{,}000304 \simeq 1'$.

Cet exemple peut être utilisé pour déterminer la valeur de l'écart admissible, par rapport à la verticale, de l'axe se déplaçant suivant un cône, d'un stabilisateur gyroscopique à un axe lorsqu'on désire l'utiliser comme un gyroazimut de haute précision. A cet effet, il faut connaître, au moins approximativement, le nombre moyen de mouvements coniques que l'axe du stabilisateur effectue par unité de temps.

L'anneau de cardan extérieur d'un stabilisateur gyroscopique à un axe à forte correction n'est pas le seul corps solide dont le mouvement soit soumis à une liaison non holonome ou différentielle du type (4.1.8). De la même propriété jouit par exemple une plate-forme à deux gyroscopes, c'est-à-dire l'anneau de cardan extérieur commun à deux gyroscopes identiques reliés par une bielle de connexion et tournant dans des sens opposés (fig. 105) [2]). La projection de la

[1]) L'égalité (4.1.10) qui trouve de nombreuses applications, est en liaison étroite avec la théorie des translations de vecteurs en géométrie riemanienne (Voir, par exemple : *Рашевский П. К.* Введение в тензорный анализ и риманова геометрия. М., Гостехиздат, 1932 (*P. Rachevski*. Introduction à l'analyse tensorielle et géométrie riemanienne) (en russe)). Cette égalité a été établie par l'auteur de la présente monographie en 1943 et publiée pour la première fois en 1952 dans son livre Механика специальных гироскопических систем (Mécanique des systèmes gyroscopiques spéciaux). Изд-во АН УССР, 1952 (en russe). Le résultat obtenu par l'auteur a été reproduit indépendamment par Goodman L. E. et Robinson A. R. et publié en 1958 dans leur article « Effect of finite rotations on gyroscopic sensing devices ». — Appl. Mech., 1958, v. 25, № 2.

[2]) Le cas des gyroscopes non reliés à moments cinétiques différents est plus compliqué. Il sera traité au paragraphe suivant de ce chapitre.

vitesse angulaire de la plate-forme proprement dite, c'est-à-dire de l'anneau extérieur commun des boîtiers des deux gyroscopes, sur l'axe z de stabilisation (en l'absence de frottement dans les axes des boîtiers et de la bielle de connexion) est égale, elle aussi, à zéro, de même que pour l'anneau de cardan extérieur d'un stabilisateur à un axe, utilisant un seul gyroscope (à forte correction).

Un autre exemple de mouvement limité par la liaison quasi non holonome (4.1.8) est la rotation d'un corps solide emmanché sur un

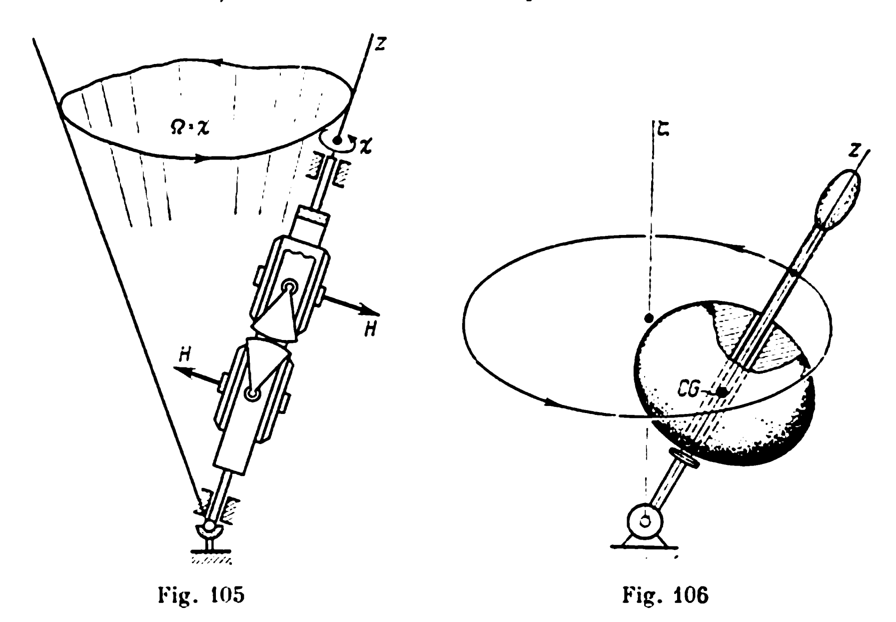


Fig. 105

Fig. 106

axe. Ce dernier doit être à la fois l'axe de symétrie dynamique du corps (fig. 106). Il est nécessaire que le frottement dans les paliers de l'axe soit nul et que le centre de gravité du corps se situe sur cet axe. Avec des conditions initiales convenables, le comportement de ce corps solide sera alors le même que celui d'un stabilisateur gyroscopique à un axe ou d'une plate-forme à deux gyroscopes.

En effet, reportons-nous à la troisième équation du système, dit d'équations dynamiques d'Euler, du mouvement du solide autour d'un point fixe (v. tome II, chap. II, § 2). Lorsque les moments d'inertie résultants A et B sont égaux, on a

$$C\frac{dr}{dt}=M_z. \qquad (4.1.24)$$

Dans le cas considéré, $M_z = 0$ et donc

$$r = r_0 = \text{const}, \qquad (4.1.25)$$

où r_0 est la valeur de la projection de la vitesse angulaire ω du solide sur son axe z de symétrie dynamique à l'instant initial.

Pour $r_0 = 0$ on obtient

$$r = \omega_z = 0. \qquad (4.1.26)$$

Si maintenant on communique à l'axe sur lequel est emmanché le solide un mouvement conique à partir de la position de repos, en lui faisant décrire un angle solide Ω, alors à la fin d'un tel mouvement, le corps s'arrête en même temps que son axe. Ceci étant, la position finale du corps ne sera pas confondue avec sa position de départ. L'égalité (4.1.26) étant équivalente à l'égalité (4.1.8), l'angle de rotation correspondant sera égal à $\chi = \Omega$. Ainsi donc, si l'axe d'un corps se meut en décrivant un cône dans le sens pour lequel la région intérieure de ce cône reste de tout temps à sa gauche, alors le corps tourne en sens inverse des aiguilles d'une montre, autour de l'axe revenu dans sa position de départ. La rotation est dans ce cas à observer depuis un point quelconque situé à une distance suffisamment grande de l'origine des coordonnées, sur la partie positive de l'axe z (v. fig. 106).

§ 2. Mouvement quasi non holonome d'une plate-forme à deux gyroscopes différents

Un cas intéressant de la liaison cinématique, à savoir de la liaison quasi non holonome, se présente (au point de vue de la théorie de précession des gyroscopes) dans un dispositif gyroscopique suivant. Un cadre dont les paliers de l'axe sont installés sur un support mobile sert de suspension pour deux gyroscopes à moments cinétiques propres différents. Pour l'un d'eux, dont le moment cinétique propre sera désigné par H', le cadre sert d'anneau de cardan extérieur (fig. 107). Le boîtier de l'autre gyroscope est rigidement lié au cadre et le vecteur H de son moment cinétique propre est perpendiculaire au plan du cadre. Attachons au cadre un système de coordonnées xyz de telle sorte que l'axe z soit l'axe du cadre et l'axe x soit orienté suivant le vecteur H. L'axe y' du boîtier du premier gyroscope est parallèle à l'axe y. Notons β l'angle fait par l'axe x' de rotation propre du premier gyroscope ou, ce qui revient au même, par le vecteur H' de son moment cinétique propre, avec l'axe x. Lorsque l'angle β augmente, le boîtier du premier gyroscope tourne en sens inverse des aiguilles d'une montre par rapport au cadre, si la rotation est observée du côté de la partie positive de l'axe y'. Les axes x' et y' introduits plus haut sont ceux du système de coordonnées $x'y'z'$ lié au boîtier du premier gyroscope (fig. 108). L'orientation de l'axe z' de ce système est évidente. Si l'angle β est nul, les axes de même nom des systèmes $x'y'z'$ et xyz sont soit confondus, soit parallèles.

Nous admettrons que le sous-système « boîtier-rotor » du premier gyroscope et le cadre tout entier ont été soumis à un équilibrage statique précis. Ceci signifie que le centre de gravité du sous-système se trouve sur l'axe y' et celui du cadre avec les deux gyroscopes sur l'axe z. Admettons également que le frottement dans les paliers des axes du cadre et du boîtier du premier gyroscope est nul, que le cadre n'est soumis à aucune force extérieure et que les gyroscopes sont animés d'une rotation uniforme par rapport à leurs boîtiers.

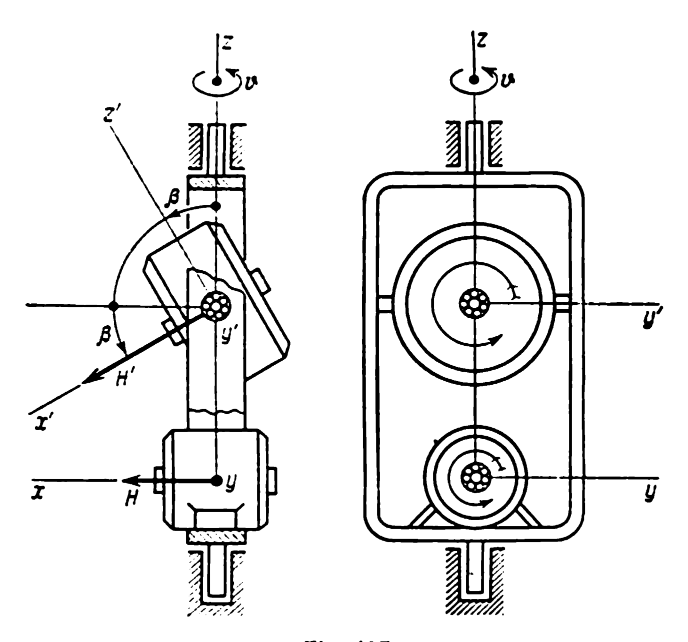


Fig. 107

Pour décrire les mouvements angulaires du cadre avec les deux gyroscopes et du premier gyroscope par rapport au cadre, nous utiliserons la théorie de précession des gyroscopes (v. tome II, chap. II). Désignons par ω' la vitesse angulaire absolue du boîtier du premier gyroscope et par $\omega'_{x'}$, $\omega'_{y'}$ et $\omega'_{z'}$ les projections de cette vitesse sur les axes respectifs du système $x'y'z'$ lié au boîtier. Suivant la théorie mentionnée (v. aussi paragraphe précédent et fig. 109) on a

$$0 = M'_{x'}, \quad \omega'_{z'}H' = M'_{y'}, \quad -\omega'_{y'}H' = M'_{z'}, \tag{4.2.1}$$

où $M'_{x'}$, $M'_{y'}$ et $M'_{z'}$ sont les projections sur les axes x', y', z' du moment M' de la force exercée par le cadre sur le boîtier du premier gyroscope.

Du fait que dans l'axe du boîtier du premier gyroscope il n'y a pas de frottement, on peut écrire

$$M'_{y'} = 0 \tag{4.2.2}$$

et, en vertu de la deuxième équation (4.2.1),

$$\omega'_{z'} = 0. \tag{4.2.3}$$

Nous avons ainsi obtenu une des équations du mouvement du système mécanique constitué par un cadre et deux gyroscopes. Au point de

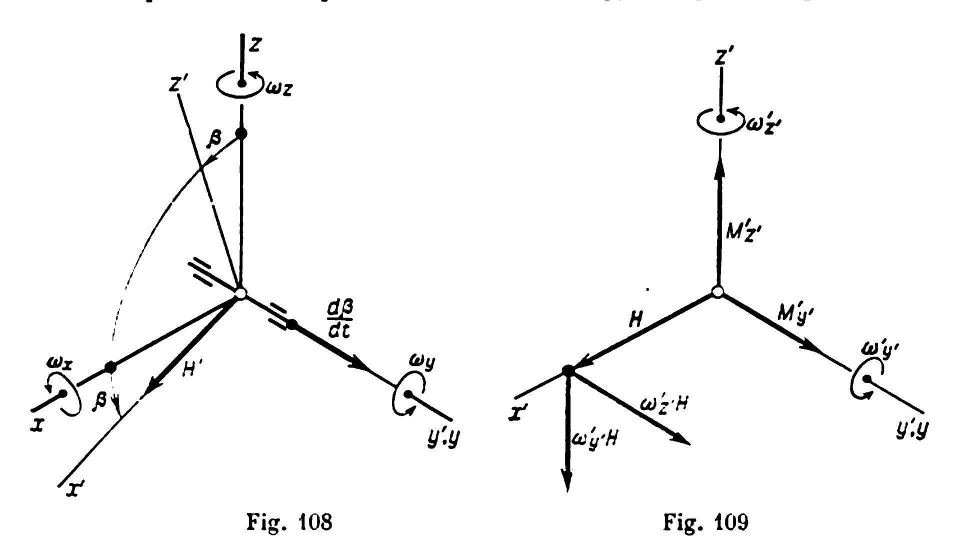


Fig. 108 Fig. 109

vue de la théorie de précession des gyroscopes, ce système mécanique possède deux coordonnées généralisées qui sont les angles β et ϑ caractérisant respectivement la rotation du boîtier du premier gyroscope par rapport au cadre et la rotation du cadre par rapport à son support. Pour établir une deuxième équation du mouvement du même système, il convient d'avoir recours aux équations du mouvement de précession du second gyroscope (fig. 110). Elles sont analogues aux équations (4.2.1), soit

$$0 = M_x, \quad \omega_z H = M_y, \quad -\omega_y H = M_z, \tag{4.2.4}$$

où ω_y et ω_z sont les projections de la vitesse angulaire du cadre sur les axes y et z du système xyz qui lui est lié.

Les seconds membres des équations (4.2.4) traduisent les projections sur les axes x, y et z du moment M de la force exercée par le cadre sur le boîtier du second gyroscope. Maintenant, en partant du principe de Newton sur l'égalité de l'action et de la réaction, il n'est pas difficile de conclure que le cadre subit de la part des boîtiers des

deux gyroscopes des forces de réaction dont la somme des moments par rapport à l'axe z a pour valeur (fig. 111)

$$-M_z - M'_{z'} \cos\beta. \tag{4.2.5}$$

Pour établir la dernière expression on a tenu compte du fait que l'axe z' fait l'angle β avec l'axe z et qu'en vertu de la première équation (4.2.1) on a $M'_{x'} = 0$.

Etant donné que les paliers de l'axe du cadre sont exempts de frottement et que le centre de gravité du cadre est situé sur l'axe z,

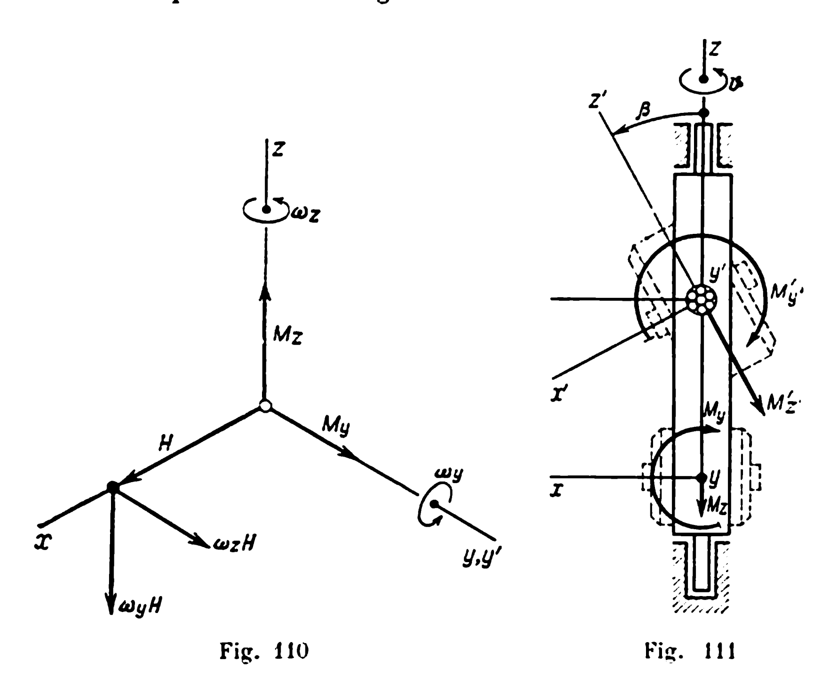


Fig. 110 Fig. 111

l'expression (4.2.5) représente la somme des moments par rapport à l'axe z de toutes les forces agissant sur le cadre. Dans la théorie de précession des gyroscopes, les moments cinétiques des éléments constitutifs de la suspension sont négligés (de même que les composantes équatoriales des moments cinétiques des rotors des gyroscopes). Vu cette circonstance, il convient de considérer que toutes les forces appliquées au cadre se compensent et qu'en particulier la somme des moments de ces forces par rapport à l'axe z est nulle (v. tome II, chap. II, § 2). Il résulte de ce qui précède que l'expression (4.2.5) est égale à zéro. En y introduisant au lieu de $M'_{z'}$ et M_z leurs expressions données par les égalités (4.2.1) et (4.2.4), on obtient finalement une deuxième équation du mouvement du système mécanique repré-

senté par le cadre à deux gyroscopes, soit

$$h\omega_y + \omega'_{y'} \cos\beta = 0. \tag{4.2.6}$$

Ici,

$$h = \frac{H}{H'} \tag{4.2.7}$$

est le rapport des moments cinétiques propres des gyroscopes du cadre. Les relations (4.2.3) et (4.2.6) constituent un système d'équations de précession du mouvement de l'ensemble mécanique considéré.

Pour l'analyse qui suit, il est nécessaire d'établir les formules qui déterminent les valeurs de $\omega'_{y'}$, $\omega'_{z'}$ et ω_y par l'intermédiaire des paramètres d'orientation de l'axe du cadre et de son support par rapport à un système de coordonnées non tournant quelconque, et par l'intermédiaire des angles β et ϑ introduits plus haut. A cet effet, on peut utiliser en partie ce qui a été établi au paragraphe précédent. Au cours de ce paragraphe, l'orientation de l'axe z du système de coordonnées xyz qui jouait un rôle analogue à celui que le système xyz joue dans le présent paragraphe, se déterminait par rapport à un système de coordonnées non tournant $\xi\eta\zeta$ (v. fig. 98) au moyen de deux angles ψ et φ. L'orientation de l'anneau de cardan extérieur du stabilisateur gyroscopique à un axe se caractérisait par l'angle ϑ formé entre l'axe x qui lui est lié et l'axe e du système de coordonnées mobile auxiliaire enz. L'axe z de ce dernier était orienté suivant l'axe de l'anneau de cardan extérieur du stabilisateur de même que l'axe z du système xyz, alors que l'axe n coupait l'axe ζ. Dans le cas que nous examinons au cours du présent paragraphe (fig. 112), les projections ω_x, ω_y et ω_z de la vitesse angulaire du système xyz sur ses axes x, y et z ont pour expressions

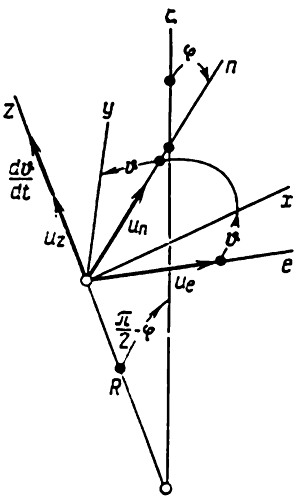


Fig. 112

$$\begin{aligned} \omega_x &= u_e \cos\vartheta + u_n \sin\vartheta, \\ \omega_y &= -u_e \sin\vartheta + u_n \cos\vartheta, \\ \omega_z &= u_z + \frac{d\vartheta}{dt}. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Ici, u_e, u_n et u_z sont les projections, données par les formules (4.1.11), de la vitesse angulaire du système mobile auxiliaire enz sur ses axes e, n et z. En utilisant les formules (4.1.11), mettons les projections

(4.2.8) de la vitesse angulaire du cadre (sur les axes du système *xyz* qui lui est lié) sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\sin\vartheta - \frac{d\varphi}{dt}\cos\vartheta,\\ \omega_y &= \frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\cos\vartheta + \frac{d\varphi}{dt}\sin\vartheta,\\ \omega_z &= \frac{d\psi}{dt}\sin\varphi + \frac{d\vartheta}{dt}.\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Signalons que la dernière des formules (4.2.9) a déjà été obtenue au paragraphe précédent sous le numéro (4.1.12).

La vitesse angulaire (relative) $d\beta/dt$ du boîtier du premier gyroscope par rapport au cadre est dirigée suivant l'axe y' parallèle à l'axe y, le système de coordonnées $x'y'z'$ étant tourné autour de l'axe y' de l'angle β par rapport au système xyz (v. fig. 108). De ce fait, les formules donnant les projections de la vitesse angulaire ω' du boîtier du premier gyroscope sur les axes du système $x'y'z'$ qui lui est lié s'écrivent sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}\omega'_{x'} &= \omega_x\cos\beta - \omega_z\sin\beta,\\ \omega'_{y'} &= \omega_y + \frac{d\beta}{dt},\\ \omega'_{z'} &= \omega_x\sin\beta + \omega_z\cos\beta\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

ou encore, compte tenu des expressions (4.2.9),

$$\begin{aligned}\omega'_{x'} &= \left(\frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\sin\vartheta - \frac{d\varphi}{dt}\cos\vartheta\right)\cos\beta - \left(\frac{d\psi}{dt}\sin\varphi + \frac{d\vartheta}{dt}\right)\sin\beta,\\ \omega'_{y'} &= \frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\cos\vartheta + \frac{d\varphi}{dt}\sin\vartheta + \frac{d\beta}{dt},\\ \omega'_{z'} &= \left(\frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\sin\vartheta - \frac{d\varphi}{dt}\cos\vartheta\right)\sin\beta + \left(\frac{d\psi}{dt}\sin\varphi + \frac{d\vartheta}{dt}\right)\cos\beta.\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

En faisant usage des formules (4.2.9) et (4.2.11) dans les égalités (4.2.3) et (4.2.6), on obtient deux relations suivantes:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\sin\vartheta - \frac{d\varphi}{dt}\cos\vartheta\right)\sin\beta + \left(\frac{d\psi}{dt}\sin\varphi + \frac{d\vartheta}{dt}\right)\cos\beta = 0,\\ &h\left(\frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\cos\vartheta + \frac{d\varphi}{dt}\sin\vartheta\right) + \\ &\qquad + \left(\frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\cos\vartheta + \frac{d\varphi}{dt}\sin\vartheta + \frac{d\beta}{dt}\right)\cos\beta = 0.\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Chacune d'elles a la forme d'une liaison différentielle ou non holonome (linéaire mais non homogène) par rapport aux dérivées des coordonnées généralisées — des angles β et ϑ — qui caractérisent l'état du système mécanique considéré. En même temps, les relations

(4.2.12) peuvent être considérées comme un système de deux équations différentielles du premier ordre par rapport aux angles cherchés β et ϑ. Les fonctions du temps $\psi(t)$ et $\varphi(t)$ qui déterminent la position courante de l'axe z par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi\eta\zeta$ doivent être considérées dans ces équations comme données. Les équations (4.2.12) étant bien compliquées, nous allons restreindre notre analyse à quelques cas particuliers.

Notons que pour $h = -1$ les vecteurs moments cinétiques propres H' et H des deux gyroscopes ont le même module mais des sens opposés (pour l'angle β égal à zéro, v. fig. 107). Soit $h = -1$, alors la deuxième équation (4.2.12) se transforme en une identité si on y pose

$$\beta \equiv 0. \tag{4.2.13}$$

Pour $\beta = 0$, la première équation (4.2.12) devient

$$\frac{d\psi}{dt}\sin\varphi + \frac{d\vartheta}{dt} = 0 \tag{4.2.14}$$

et donc se transforme, elle aussi, en une identité si l'on prend pour $\vartheta = \vartheta(t)$ la fonction

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 - \int_0^t \frac{d\psi(t)}{dt}\sin\varphi(t)\,dt, \tag{4.2.15}$$

où ϑ_0 est une constante arbitraire.

L'ensemble des formules (4.2.13) et (4.2.15) déterminant les angles β et ϑ lorsque $h = -1$, peut être considéré comme solution du système d'équations (4.2.12) satisfaisant aux conditions initiales

$$\vartheta(0) = \vartheta_0, \quad \beta(0) = 0. \tag{4.2.16}$$

Or, le premier membre de l'équation (4.2.14) représente, en vertu de la troisième formule (4.2.9), la projection de la vitesse angulaire ω du système xyz, donc du cadre, sur l'axe z. Ainsi, dans le cas où $h = -1$, le cadre examiné se comporte comme l'anneau de cardan extérieur d'un stabilisateur gyroscopique à un axe à correction « forte » ou comme un cadre à deux gyroscopes reliés par une bielle de connexion, que nous avons étudiés au paragraphe précédent, c'est-à-dire comme un corps dont le mouvement angulaire est limité par la condition (4.1.8). Ceci étant, la « forte » correction est assurée par le second gyroscope. Le moment (égal en grandeur au moment M, mais dirigé en sens opposé) exercé par ce gyroscope au cours des mouvements angulaires du cadre est transmis au premier gyroscope par l'intermédiaire des réactions normales des paliers de son boîtier. La précession du premier gyroscope qui en résulte prend une valeur telle que l'angle β reste constamment nul.

Le cas de $h = 0$ est un cas limite parce que le second gyroscope devient alors pratiquement inopérant et le premier se transforme en un gyroscope libre suspendu à la cardan. Les équations (4.2.12)

prennent dans ce cas la forme suivante:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vartheta}{dt} &= -\frac{d\psi}{dt}(\sin\varphi + \cos\varphi \sin\vartheta \operatorname{tg}\beta) + \frac{d\varphi}{dt}\cos\vartheta \operatorname{tg}\beta, \\
\frac{d\beta}{dt} &= -\frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\cos\vartheta - \frac{d\varphi}{dt}\sin\vartheta.
\end{aligned} \tag{4.2.17}$$

Elles sont presque aussi compliquées que les équations (4.2.12). Néanmoins, leurs intégrales premières peuvent être trouvées tout de suite. En effet, par hypothèse, les paliers des axes du cadre et du boîtier du premier gyroscope sont exempts de frottement et le second gyroscope est inexistant. Par suite, d'après la théorie de précession des gyroscopes, le vecteur moment cinétique propre H' du premier gyroscope doit conserver son orientation inchangée par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi\eta\zeta$ (v. fig. 98 et plus loin fig. 117 et 118). En particulier, ses projections H'_ξ, H'_η et H'_ζ sur les axes correspondants de ce système doivent être constantes. Déterminons ces projections. Les projections du vecteur H' sur les axes du système xyz ont pour valeurs (v. fig. 108)

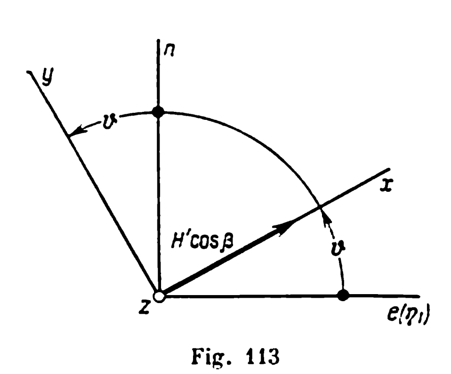


Fig. 113

$$H'_x = H'\cos\beta, \quad H'_y = 0, \quad H'_z = -H'\sin\beta. \tag{4.2.18}$$

Les projections du même vecteur sur les axes du système mobile auxiliaire enz ont donc pour expressions (fig. 113):

$$\begin{gathered}
H'_e = H'\cos\beta\cos\vartheta, \quad H'_n = H'\cos\beta\sin\vartheta, \\
H'_z = -H'\sin\beta.
\end{gathered} \tag{4.2.19}$$

En se servant des dernières formules, il n'est pas difficile de déterminer les projections du vecteur H' sur les axes du système de coordonnées $\xi_1\eta_1\zeta_1$ (fig. 114) dont ζ_1 se confond avec l'axe ζ du système $\xi\eta\zeta$, et l'axe ξ_1 est dirigé suivant l'intersection des plans $\xi\eta$ et nz (ou, ce qui revient au même, des plans $\xi\eta$ et ζz). La position de l'axe η_1 est ainsi déterminée de façon unique. Il vient

$$\begin{aligned}
H'_{\xi_1} &= H'(-\cos\beta\sin\vartheta\sin\varphi - \sin\beta\cos\varphi), \\
H'_{\eta_1} &= H'_e = H'\cos\beta\cos\vartheta, \\
H'_{\zeta_1} &= H'(\cos\beta\sin\vartheta\cos\varphi - \sin\beta\sin\varphi).
\end{aligned} \tag{4.2.20}$$

L'angle des axes ξ et ξ_1, ainsi que des axes η et η_1, étant égal à ψ (fig. 98 et 115), les projections cherchées du vecteur moment ciné-

tique propre H' du premier (en l'occurrence, du seul) gyroscope sur les axes ξ, η et ζ s'expriment par les formules

$$H'_\xi = H' \left[(-\cos\beta \sin\vartheta \sin\varphi - \sin\beta \cos\varphi) \cos\psi - \cos\beta \cos\vartheta \sin\psi \right],$$

$$H'_\eta = H' \left[(-\cos\beta \sin\vartheta \sin\varphi - \sin\beta \cos\varphi) \sin\psi + \cos\beta \cos\vartheta \cos\psi \right],$$

$$H'_\zeta = H'_{\zeta_1} = H' (\cos\beta \sin\vartheta \cos\varphi - \sin\beta \sin\varphi). \qquad (4.2.21)$$

Il n'est pas difficile de se convaincre, bien qu'au prix des calculs assez volumineux, que les seconds membres de ces dernières égalités sont réellement des intégrales premières des équations (4.2.17).

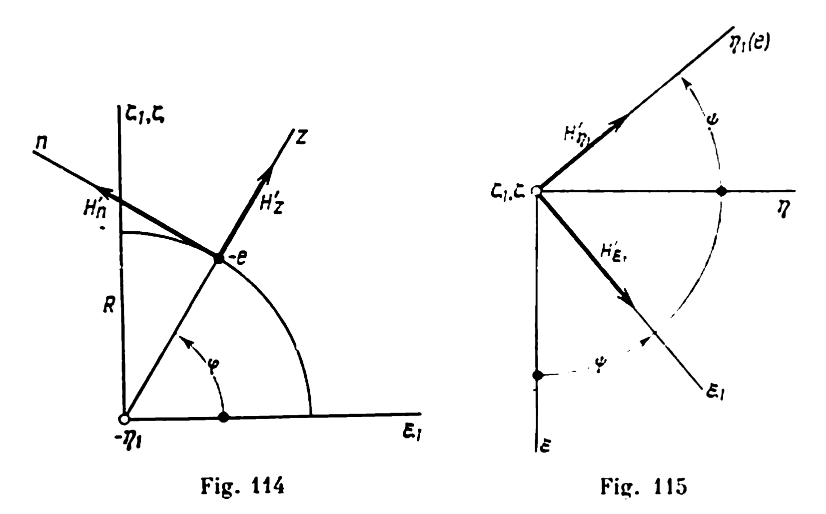


Fig. 114 Fig. 115

A cet effet, il suffit de dériver ces expressions par rapport au temps et de remplacer les dérivées des angles ϑ et β par les seconds membres des équations (4.2.17). On constatera, après réduction des termes semblables, que la dérivée par rapport au temps de chacune des grandeurs H'_ξ, H'_η et H'_ζ est identiquement nulle. De trois intégrales premières (4.2.21) il n'y a, bien entendu, que deux qui sont indépendantes.

Deux quelconques de trois égalités (4.2.21) peuvent être considérées comme des équations trigonométriques pour la détermination des valeurs courantes des angles $\vartheta = \vartheta(t)$ et $\beta = \beta(t)$, lorsque les fonctions $\psi = \psi(t)$ et $\varphi = \varphi(t)$ sont données. Il est également nécessaire de se donner deux quelconques de trois rapports des projections H'_ξ, H'_η, H'_ζ à la valeur du moment cinétique H'. Etant donné les valeurs de $\vartheta(0)$ et $\beta(0)$, pour rechercher ces rapports il faut calculer les valeurs des seconds membres des mêmes égalités (4.2.21) pour l'instant $t = 0$. Posons en particulier

$$\beta(0) = 0. \qquad (4.2.22)$$

Le choix du système de coordonnées non tournant $\xi\eta\zeta$ étant arbitraire, orientons ses axes de manière qu'à l'instant initial $t = 0$ son axe ξ soit dirigé suivant axe z du cadre (fig. 116). Alors, au même instant initial, on a les égalités

$$\psi(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0. \tag{4.2.23}$$

Dirigeons l'axe η parallèlement à l'orientation initiale de l'axe x et par conséquent, parallèlement au vecteur moment cinétique propre

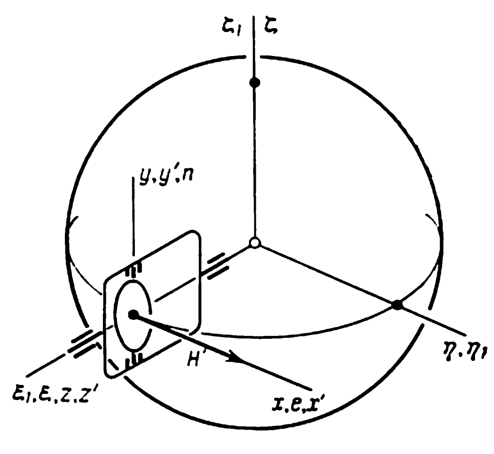


Fig. 116

H' du gyroscope. Remarquons qu'à l'instant $t = 0$, les axes e et n du système mobile auxiliaire enz seront respectivement parallèles aux axes η et ζ et confondus avec les axes x et y. De cette dernière circonstance il s'ensuit que

$$\vartheta(0) = 0. \tag{4.2.24}$$

En introduisant dans les formules (4.2.21) les valeurs initiales des angles ϑ, β, ψ et φ données par les égalités (4.2.22) à (4.2.24), on obtient pour le cas considéré (v. aussi fig. 117)

$$H'_\xi = 0, \quad H'_\eta = H', \quad H'_\zeta = 0. \tag{4.2.25}$$

Suivant les formules (4.2.21), les angles ϑ, β, ψ et φ sont maintenant liés par trois relations suivantes:

$$-(\cos\beta\sin\vartheta\sin\varphi + \sin\beta\cos\varphi)\cos\psi - \cos\beta\cos\vartheta\sin\psi = 0,$$
$$-(\cos\beta\sin\vartheta\sin\varphi + \sin\beta\cos\varphi)\sin\psi + \cos\beta\cos\vartheta\cos\psi = 1,$$
$$\cos\beta\sin\vartheta\cos\varphi - \sin\beta\sin\varphi = 0, \tag{4.2.26}$$

dont, bien entendu, deux seulement sont indépendantes. La première équation (4.2.26) permet d'exprimer tg β par l'intermédiaire des angles ϑ, ψ et φ, et la troisième équation permet de le faire par l'intermédiaire des angles ϑ et φ. En égalant les résultats, on obtient, après quelques transformations simples, l'équation trigonométrique

$$\operatorname{tg} \vartheta = -\operatorname{tg} \psi \sin \varphi \qquad (4.2.27)$$

permettant de déterminer l'angle ϑ lorsque les angles ψ et φ sont donnés. Multiplions maintenant par $\cos \psi$ les deux membres de la première équation (4.2.26) et par $\sin \psi$ les deux membres de la deuxième. En additionnant membre à membre les deux équations ainsi obtenues, on est conduit à l'égalité

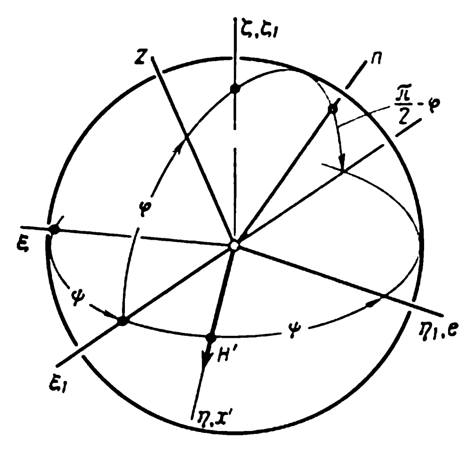


Fig. 117

$$-(\cos \beta \sin \vartheta \sin \varphi + \sin \beta \cos \varphi) = \sin \psi. \qquad (4.2.28)$$

Effectuons les mêmes opérations sur la troisième équation (4.2.26) et l'équation (4.2.28) que nous venons d'obtenir, en les multipliant respectivement par $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$. Il en résulte une nouvelle équation trigonométrique

$$\sin \beta = -\sin \psi \cos \varphi, \qquad (4.2.29)$$

cette fois pour l'angle β.

La forme bien simple des deux équations trigonométriques (4.2.27) et (4.2.29) rend possible leur obtention directe par voie géométrique. A cet effet, considérons le déplacement angulaire de l'axe du cadre, c'est-à-dire de l'axe z, de sa position initiale caractérisée par les coordonnées $\psi = 0$, $\varphi = 0$ dans une autre position quelconque. Regardons comment seront orientés, après un tel déplacement, les

axes x et y du système xyz lié au cadre, ainsi que les axes du système $x'y'z'$ lié au boîtier du gyroscope. Pour la commodité de l'analyse, faisons coïncider les origines de tous les systèmes de coordonnées introduits plus haut: $\xi\eta\zeta$, $\xi_1\eta_1\zeta_1$, enz, xyz et $x'y'z'$. Comme on l'a vu ci-dessus, dans la position de départ, c'est-à-dire à l'instant $t = 0$, les axes ξ_1, z et z' étaient confondus avec l'axe ξ, les axes η_1, e, x et x' avec l'axe η, et les axes ζ_1, n, y et y' avec l'axe ζ. Vers l'instant courant t, le système $\xi_1\eta_1\zeta_1$ (v. fig. 117) aura tourné autour de l'axe

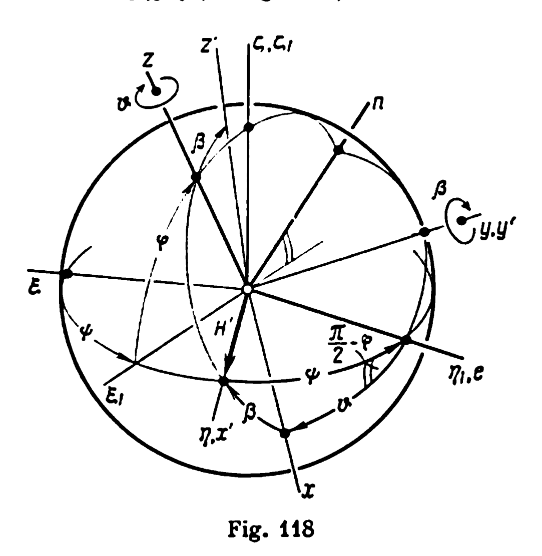


Fig. 118

ζ_1 (ou, ce qui revient au même, autour de l'axe ζ) de l'angle ψ, en sens inverse des aiguilles d'une montre, par rapport au système $\xi\eta\zeta$, et le système enz aura tourné autour des axes confondus η_1 et e de l'angle φ, dans le sens des aiguilles d'une montre, par rapport au système $\xi_1\eta_1\zeta_1$. Les rotations sont à observer, dans le premier cas, du côté de la partie positive des axes ζ et ζ_1 et, dans le second cas, du côté de la partie positive des axes η_1 et e. Il en résulte (v. fig. 117 et 118) que le plan en est incliné par rapport au plan $\xi\eta$ de l'angle $\pi/2 - \varphi$. Par ailleurs, vers l'instant t, le système xyz lié au cadre aura tourné de l'angle ϑ autour de l'axe z par rapport au système enz, et le système $x'y'z'$ lié au boîtier du gyroscope aura tourné de l'angle β autour de l'axe y (ou, ce qui revient au même, autour de l'axe y') par rapport au système xyz. Or, pendant toute la durée de mouvement du cadre et du boîtier du gyroscope, l'axe x' doit rester parallèle à l'axe η, c'est-à-dire à sa direction initiale. En effet, l'axe x' est dirigé suivant le vecteur moment cinétique propre H' et donc ne doit pas, vu l'absence de frottement dans les axes du cadre et du boîtier du gyroscope, changer son orientation par rapport au système de coor-

données non tournant $\xi\eta\zeta$ (d'après la théorie de précession des gyroscopes). Il n'est pas difficile de voir que pour $\dot{\psi} > 0$ et $\dot{\varphi} > 0$, ceci n'est possible (fig. 118) que dans le cas où les rotations autour des axes z et y (y') (respectivement des angles ϑ et β) s'effectuent dans le sens des aiguilles d'une montre lorsque ces rotations sont observées respectivement du côté des parties positives des axes z et y (y'). Ceci signifie que les valeurs des angles ϑ et β doivent être négatives.

L'angle ϑ est formé entre les axes e et x, et l'angle β entre les axes x et x'. Le plan contenant les axes e et x est perpendiculaire au plan dans lequel sont situés les axes x et x'. En effet, l'axe z est perpendiculaire aux deux premiers axes, et l'axe y (ou, ce qui revient au même, l'axe y') l'est à deux autres. Mais les axes z et y, qui appartiennent au même système de coordonnées xyz, sont perpendiculaires entre eux, d'où il résulte la perpendicularité des plans sus-mentionnés.

Ainsi, trois droites: η qui se confond avec l'axe x', η_1 (ou l'axe e) et enfin l'axe x, sont situées dans l'espace de la façon suivante (v. fig. 118). L'angle des axes η (x') et η_1 (e) est égal à ψ; l'angle formé entre η_1 (e) et x est égal au module de ϑ; l'angle des axes x et η (x') est égal au module de β. De plus, les plans $x\eta$ (xz) et $x\eta_1$ (xy) forment entre eux un angle droit, et les plans $x\eta_1$ (en) et $\eta\eta_1$ ($\xi\eta$) l'angle $\pi/2$ — — φ. A cette disposition des droites η (x'), η_1 (e) et x correspond, sur la sphère S, un triangle sphérique rectangle. Par conséquent, les relations (4.2.27) et (4.2.29) résultent des formules fondamentales de la trigonométrie sphérique, à condition de poser dans ces dernières que (v. fig. 118 dans laquelle les angles ϑ et β sont négatifs)

$$\widehat{(\eta_1, x)} = -\vartheta, \quad \widehat{(x, \eta)} = -\beta. \tag{4.2.30}$$

Les mêmes formules peuvent également s'obtenir par une voie purement géométrique, pareillement à ce qui a été fait à la fin du § 4, chap. III.

Passons maintenant à l'analyse des équations (4.2.12) dans le cas général où $h \neq 0$. L'orientation du système non tournant $\xi\eta\zeta$ sera prise la même que dans l'exemple précédent (v. fig. 116 dans laquelle il faut ajouter le moment cinétique propre H du second gyroscope). Alors, à l'instant $t = 0$, les égalités (4.2.23) et (4.2.24) seront vérifiées comme précédemment. Admettons par ailleurs qu'à l'instant initial l'angle β satisfait encore à la condition (4.2.22), c'est-à-dire est égal à zéro. Revenons à la formule (4.1.17). Elle n'est applicable à la détermination de l'angle de rotation du cadre gyroscopique considéré autour de son axe qui se meut en décrivant une surface conique fermée, que si $h = -1$, c'est-à-dire si les gyroscopes sont identiques mais tournent dans des sens opposés. L'angle χ correspondant est égal à l'angle solide du cône mentionné. Il s'ensuit que lorsque les accroissements des coordonnées polaires ψ et φ par rapport à leurs valeurs initiales sont petits, l'angle χ ou, ce qui revient au même,

l'accroissement de l'angle ϑ correspondant à un cycle de mouvement conique de l'axe z est, conformément aux formules (4.1.21) et (4.1.23), de même ordre que le produit des accroissements mentionnés des angles ψ et φ. Si les valeurs initiales des angles ψ et φ sont nulles comme dans le cas considéré, l'ordre de l'angle χ est celui du produit des angles ψ et φ, à condition que leurs valeurs ne soient pas grandes. Conformément à la formule (4.2.27) qui se rapporte déjà au cas de $h = 0$, l'ordre de l'angle de rotation du cadre par rapport au système auxiliaire *enz* est égal, lui aussi, à l'ordre du produit des angles ψ et φ. A la différence du cas où $h = -1$, cet angle « ne s'accumule pas », il disparaît lorsque l'axe du cadre revient dans sa position de départ, c'est-à-dire qu'on a l'égalité $\chi = 0$. Quant à l'angle β, on doit considérer suivant la formule (4.2.29) que son ordre de grandeur est le même que celui de l'angle ψ.

D'après ce qui précède, il faut s'attendre que pour des valeurs de h comprises entre 0 et -1, ainsi qu'au moins pour de faibles valeurs positives de h, la variation que subit l'angle ϑ lorsque l'axe z du cadre se meut en décrivant une surface conique fermée, sera de l'ordre de grandeur du produit des angles ψ et φ, si seulement ces derniers restent petits au cours de leur variation. Compte tenu des remarques faites, gardons dans les équations (4.2.12) les seuls termes de premier ordre en β, ψ et φ et rejetons des termes comportant $\sin\vartheta$ comme facteur, parce qu'ils sont, pour $\vartheta(0) = 0$, d'un ordre supérieur. En outre, en représentant les équations (4.2.12) sous forme des relations entre les différentielles, on obtient

$$\begin{gathered}-\beta d\varphi + d\vartheta + \varphi d\psi = 0,\\ (h+1)\, d\psi + d\beta = 0.\end{gathered} \tag{4.2.31}$$

Compte tenu des conditions initiales (4.2.22) et (4.2.23), la seconde des relations (4.2.31) se met, après intégration, sous la forme suivante:

$$\beta = -(h+1)\,\psi. \tag{4.2.32}$$

En utilisant cette dernière formule dans la première relation (4.2.31), on obtient

$$d\vartheta = -\varphi d\psi - (h+1)\,\psi d\varphi = -(h+1)\, d(\psi\varphi) + h\varphi d\psi. \tag{4.2.33}$$

Il s'ensuit, compte tenu des conditions initiales (4.2.23) et (4.2.24), que l'angle cherché ϑ s'exprime par la formule suivante contenant une intégrale curviligne:

$$\vartheta = -(h+1)\,\psi\varphi + h\int_{0,\,0}^{\psi,\,\varphi} \varphi\, d\psi. \tag{4.2.34}$$

Lorsque l'axe du cadre revient dans sa position initiale pour laquelle $\psi = \varphi = 0$, on a

$$\vartheta = h \oint \varphi\, d\psi. \tag{4.2.35}$$

Or, d'après la formule (4.1.24), l'intégrale curviligne (changée de signe) intervenant au second membre de l'égalité (4.2.35) représente, à des termes d'ordre non inférieur au troisième près, une mesure de l'angle solide du cône décrit par l'axe z lorsque celui-ci revient dans sa position de départ. L'accroissement de l'angle ϑ correspondant à un tel mouvement étant désigné, dans le paragraphe précédent, par χ, on a, pour le mouvement du cadre gyroscopique décrit ci-dessus, une formule approchée [1])

$$\chi = -h\Omega. \tag{4.2.36}$$

Pour $h = -1$, cette formule devient exacte et se confond avec la formule (4.1.10) du paragraphe précédent.

§ 3. Projection de la vitesse angulaire du navire sur la verticale et vitesse angulaire d'embardée

Examinons d'abord un exemple de liaison non holonome imposée à un corps solide en mouvement autour d'un point fixe. Soit un corps mobile dont la projection de la vitesse angulaire sur une droite de direction constante par rapport à un système de coordonnées non tournant est à tout instant nulle. Il s'agit de déterminer l'orientation du corps par rapport au même système, dans le cas où une autre droite rigidement reliée au corps et passant par le point fixe revient, au cours du mouvement du corps, dans sa position initiale.

Pour résoudre ce problème, prenons pour droite de direction constante l'axe ζ du système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ introduit au § 1 du présent chapitre. Comme deuxième droite mentionnée ci-dessus, prenons l'axe z d'un système de coordonnées xyz rigidement relié au corps et ayant son origine au point fixe du corps. L'orientation de l'axe z par rapport au système $\xi\eta\zeta$ sera déterminée, de même qu'au § 1 du présent chapitre, par les angles ψ et φ (v. fig. 98). En outre, introduisons l'angle ϑ qui caractérise, comme dans le paragraphe sus-mentionné, la rotation du système xyz par rapport au système mobile auxiliaire enz (v. fig. 98 et 100).

---

[1]) Voir l article de *Климов Д. М.*, *Потапенко В. А.* « К уходам гироскопа в кардановом подвесе на подвижном основании».—Инж. ж. МТТ, 1966, № 1 (*D. Klimov*, *V. Potapenko*. « Sur les dérives d'un gyroscope suspendu à la cardan sur un support mobile » (en russe)), où la formule (4.2.36) a été obtenue par un autre procédé dont l'idée est la suivante. Etant donné que h est petit, on peut admettre qu'en première approximation la direction du moment cinétique propre H' du grand gyroscope (dont le boîtier possède la liberté de rotation par rapport au cadre) reste inchangée, lorsque l'axe du cadre change d'orientation. Ceci étant, on détermine la nature de changement d'orientation du moment cinétique propre H du second (petit) gyroscope, ainsi que l'effort qu'il exerce sur le cadre et puis l'action du cadre sur le premier gyroscope. Ensuite on détermine, à l'approximation d'ordre suivant, le changement d'orientation du premier gyroscope par suite de l'action mentionnée, ce qui conduit finalement à la formule (4.2.36).

Au paragraphe précédent, nous avons obtenu les formules (4.2.9) exprimant, par l'intermédiaire des angles φ et ϑ et des dérivées par rapport au temps des angles ψ, φ, ϑ, les projections de la vitesse angulaire ω du système xyz sur ses axes x, y, z, à savoir

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\sin\vartheta - \frac{d\varphi}{dt}\cos\vartheta, \\ \omega_y &= \frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\cos\vartheta + \frac{d\varphi}{dt}\sin\vartheta, \\ \omega_z &= \frac{d\psi}{dt}\sin\varphi + \frac{d\vartheta}{dt}. \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Il est aisé de s'assurer, en utilisant les formules (4.1.11) ou en posant $\vartheta = 0$ (v. fig. 100) dans les formules (4.3.1), que les projections ω_e, ω_n, ω_z de la vitesse angulaire du système xyz, cette fois sur les axes du système mobile auxiliaire enz, ont pour valeurs

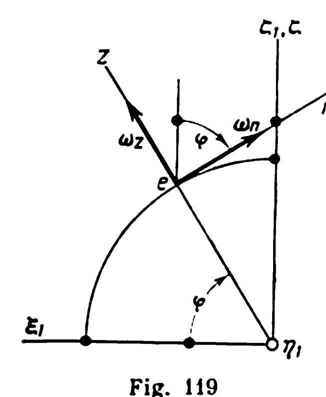


Fig. 119

$$\begin{aligned} \omega_e &= u_e = -\frac{d\varphi}{dt}, \\ \omega_n &= u_n = \frac{d\psi}{dt}\cos\varphi, \\ \omega_z &= u_z + \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\psi}{dt}\sin\varphi + \frac{d\vartheta}{dt}. \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Ici, u_e, u_n, u_z sont les projections de la vitesse angulaire du système enz sur ses propres axes (v. aussi fig. 99). On a par ailleurs (fig. 119)

$$\omega_\zeta = \omega_n \cos\varphi + \omega_z \sin\varphi \tag{4.3.3}$$

et donc en vertu des formules précédentes

$$\omega_\zeta = \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\vartheta}{dt}\sin\varphi. \tag{4.3.4}$$

La formule (4.3.4) peut, bien entendu, s'obtenir directement. En effet, la vitesse angulaire ω du système de coordonnées xyz rigidement lié au corps est la somme géométrique des vitesses angulaires relatives $d\psi/dt$, $d\varphi/dt$ et $d\vartheta/dt$, où $d\psi/dt$ est la vitesse angulaire du système $\xi_1\eta_1\zeta_1$ par rapport au système $\xi\eta\zeta$, $d\varphi/dt$ celle du système enz par rapport à $\xi_1\eta_1\zeta_1$ et enfin $d\vartheta/dt$, la vitesse du système xyz par rapport à enz (fig. 120). Par conséquent, la projection de la vitesse angulaire ω sur l'axe ζ est égale à la somme des projections, sur le même axe, des composantes des vitesses angulaires $d\psi/dt$, $d\varphi/dt$ et $d\vartheta/dt$. Le vecteur de la première d'entre elles est orienté suivant l'axe ζ, le vecteur de la deuxième, suivant la direction négative de

l'axe η_1, donc perpendiculairement à l'axe ζ (fig. 121). Enfin, le vecteur de la vitesse angulaire $d\vartheta/dt$ est dirigé suivant l'axe z qui fait avec l'axe ζ l'angle $\pi/2 - \varphi$. Après ces remarques, la formule (4.3.4) devient évidente.

D'après les hypothèses du problème il convient de poser

$$\omega_\zeta = 0, \tag{4.3.5}$$

ce qui permet d'écrire, compte tenu de la formule (4.3.4), l'équation

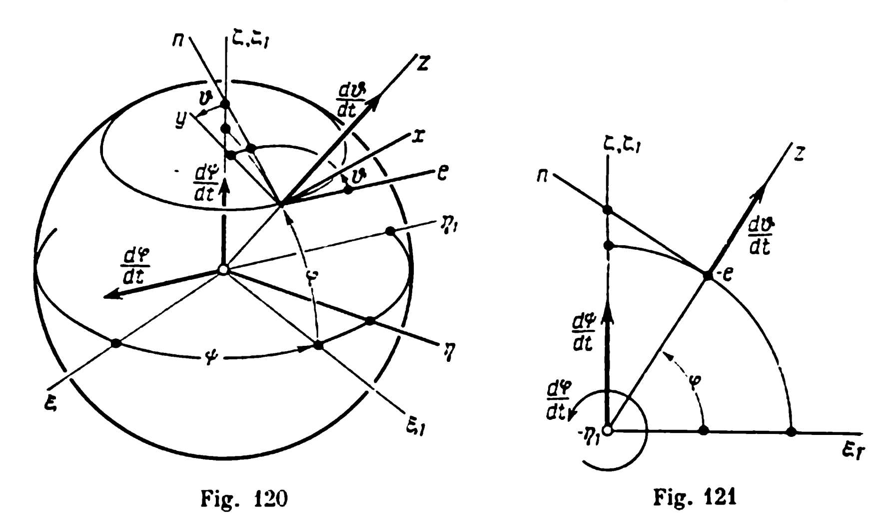


Fig. 120 Fig. 121

différentielle suivante pour la détermination de l'angle ϑ:

$$\frac{d\vartheta}{dt}\sin\varphi + \frac{d\psi}{dt} = 0. \tag{4.3.6}$$

Supposons que les angles ψ et φ qui déterminent la position de l'axe z par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi\eta\zeta$ soient donnés par des fonctions du temps

$$\psi = \psi(t), \quad \varphi = \varphi(t). \tag{4.3.7}$$

On tire alors de la relation (4.3.6)

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 - \int_0^t \frac{1}{\sin\varphi(t)} \frac{d\psi(t)}{dt}\, dt, \tag{4.3.8}$$

où

$$\vartheta_0 = \vartheta(0) \tag{4.3.9}$$

est la valeur de l'angle ϑ à l'instant initial $t = 0$. Mettons la formule (4.3.8) sous une forme analogue à celle de la formule (4.1.15)

obtenue au § 1 du présent chapitre. Il vient

$$\vartheta-\vartheta_0=-\int\limits_{\psi_0,\,\varphi_0}^{\psi,\,\varphi}\frac{d\psi}{\sin\varphi}. \qquad (4.3.10)$$

Pour pouvoir calculer l'intégrale curviligne figurant au second membre de cette formule, il suffit de connaître le chemin d'intégration dans le plan $\psi\varphi$ ou, ce qui revient au même, l'angle φ exprimé en fonction de l'angle ψ. La loi de variation dans le temps de la coordonnée ψ (et comme corollaire de la coordonnée φ) est dans ce cas sans importance. Si l'axe z revient dans sa position de départ, l'angle ϑ subit une variation égale à

$$\chi=-\oint\limits_{c}\frac{d\psi}{\sin\varphi}, \qquad (4.3.11)$$

où l'intégrale curviligne est prise suivant un contour fermé dans le plan $\psi\varphi$ de même que dans la formule (4.1.18) du § 1 de ce chapitre. En faisant usage de la formule de Green (4.1.20), on obtient

$$\chi=-\iint\limits_{\sigma}\frac{\cos\varphi\,d\varphi\,d\psi}{\sin^2\varphi}. \qquad (4.3.12)$$

Ici, l'intégrale est étendue au domaine σ (v. fig. 101) du plan $\psi\varphi$, situé à l'intérieur du contour fermé mentionné ci-dessus. On suppose que l'intégrale figurant dans la formule (4.3.11) est prise suivant un contour fermé, orienté dans un sens tel que lors de son parcours le domaine se trouve de tout temps à gauche. Dans le cas contraire, le signe devant le second membre de la formule (4.3.12) doit être inversé. Malheureusement, l'intégrale double (4.3.12) n'est pas susceptible d'une interprétation géométrique simple comme c'est le cas de l'intégrale analogue (4.1.22) du § 1 du présent chapitre. Signalons néanmoins que si pour tous les points du domaine σ (v. fig. 101) $0<\varphi\leqslant\pi/2$, on a la double inégalité suivante

$$\iint\limits_{\sigma}\cos\varphi\,d\varphi\,d\psi<\iint\limits_{\sigma}\frac{\cos\varphi\,d\varphi\,d\psi}{\sin^2\varphi}<\iint\limits_{\sigma}\frac{\cos\varphi\,d\varphi\,d\psi}{\sin^3\varphi}. \qquad (4.3.13)$$

Comme il a déjà été établi au § 1, la première des intégrales doubles intervenant dans (4.3.13) représente une mesure de l'angle solide Ω du cône décrit par l'axe z au cours de son mouvement. Conformément aux formules (4.1.9) et (4.1.10), cette mesure se détermine par le rapport de l'aire F de la figure découpée dans la sphère S (fig. 122) par le cône mentionné ci-dessus, au carré du rayon R de cette sphère :

$$\frac{F}{R^2}=\Omega. \qquad (4.3.14)$$

La dernière intégrale double de (4.3.13) comporte, elle aussi, une interprétation géométrique. Elle représente le rapport A/R^2, où A est l'aire de la figure découpée par le même cône dans le plan tangent à la sphère S au point de son intersection avec l'axe ζ (v. fig. 122).

En effet, menons par l'origine du système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ une droite quelconque jusqu'à l'intersection avec le plan tangent sus-

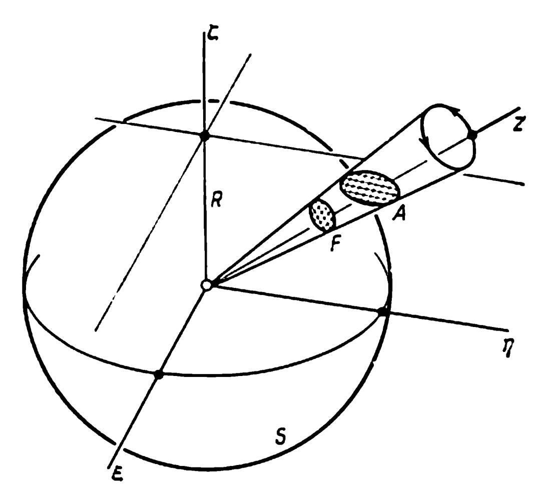


Fig. 122

mentionné (fig. 123). La distance entre le point d'intersection qui en résulte et le point de tangence du plan et de la sphère S est égale à

$$r = R \operatorname{cotg} \varphi. \tag{4.3.15}$$

Introduisons dans le plan tangent un système de coordonnées polaires r, θ (fig. 124) en posant que

$$\theta = \psi. \tag{4.3.16}$$

L'aire de surface élémentaire rapportée à ce système s'exprime par la formule

$$dA = r d\theta\, dr. \tag{4.3.17}$$

Si l'on tient compte maintenant des égalités (4.3.15) et (4.3.16), on obtient

$$r d\theta\, dr = -R^2 \frac{\cos\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sin^3\varphi}. \tag{4.3.18}$$

Il en découle que l'aire de la surface découpée par le cône dans le plan tangent s'exprime, au signe près, par l'intégrale double

$$A=R^2\iint_\sigma \frac{\cos\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sin^3\varphi}. \qquad (4.3.19)$$

En tenant compte des égalités (4.3.19) et (4.3.12) ainsi que de la relation (4.3.14), on peut mettre la double inégalité (4.3.13) sous la forme suivante:

$$\Omega=\frac{F}{R^2}<\chi<\frac{A}{R^2}, \qquad (4.3.20)$$

ce qui permet de majorer et de minorer l'angle de rotation χ du corps à l'aide des grandeurs purement géométriques.

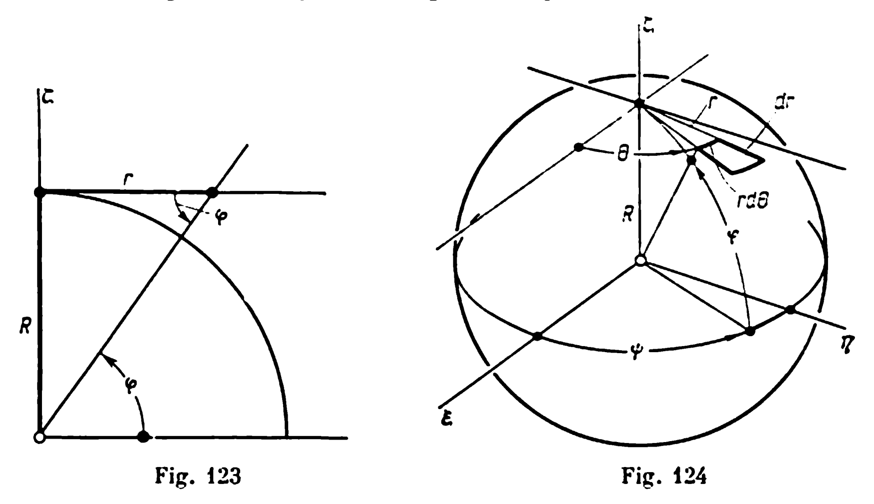


Fig. 123 Fig. 124

La formule (4.3.12) ou la formule (4.3.11) qui lui est équivalente est la solution du problème posé au début du présent paragraphe. Il s'ensuit en même temps de ces formules qu'il est inadmissible, pour déterminer l'angle ρ, c'est-à-dire l'embardée du navire, d'utiliser la formule

$$\rho=\rho_0+\int_0^t \omega_\zeta\, dt, \qquad (4.3.21)$$

où ρ_0 est la valeur initiale de cet angle et ω_ζ est la projection de la vitesse angulaire du navire, considéré comme un corps solide, sur un axe vertical. En effet, pour $\omega_\zeta=0$, la formule (4.3.21) signifie l'invariabilité de l'angle ρ. Or, comme il a été montré plus haut, la condition $\omega_\zeta=0$ n'assure nullement l'absence de rotations du corps autour de l'axe ζ.

En laissant de côté la description du schéma du dispositif qui permet de mesurer la vitesse angulaire ω du navire, de calculer sa projection ω_ζ sur la direction verticale et l'intégrale de cette projection par rapport au temps, proposons-nous d'analyser de plus près la formule (4.3.21). En y remplaçant la projection de la vitesse angulaire ω_ζ par son expression (4.3.4), on obtient l'égalité

$$\rho=\rho_0+\int_0^t\left(\frac{d\psi}{dt}+\frac{d\vartheta}{dt}\sin\varphi\right)dt \tag{4.3.22}$$

qui peut être mise, pareillement à ce qui a été fait précédemment, sous la forme suivante:

$$\rho=\rho_0+\psi-\psi_0+\int_{\vartheta_0,\varphi_0}^{\vartheta,\varphi}\sin\varphi\,d\vartheta. \tag{4.3.23}$$

Ici, ψ, φ et ϑ sont les valeurs courantes des angles qui déterminent la position du navire par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi\eta\zeta$ et ψ_0, φ_0, ϑ_0 les valeurs initiales des mêmes angles (à l'instant $t=0$). Il est évident que la valeur de ρ donnée par la formule (4.3.23) dépend, de façon substantielle, de la forme de la courbe dans le plan $\vartheta\varphi$ suivant laquelle est calculée l'intégrale curviligne

$$\int_{\vartheta_0,\varphi_0}^{\vartheta,\varphi}\sin\varphi\,d\vartheta. \tag{4.3.24}$$

C'est pourquoi, la variation de ρ en fonction des angles ϑ et φ n'est pas univoque comme il fallait s'y attendre.

Supposons que par suite d'un mouvement angulaire le navire reprend à un instant $t=t_1$ son orientation initiale par rapport au système $\xi\eta\zeta$. Il est évident qu'à cet instant sont vérifiées les égalités

$$\psi_1=\psi_0,\quad \varphi_1=\varphi_0,\quad \vartheta_1=\vartheta_0, \tag{4.3.25}$$

où

$$\psi_1=\psi(t_1),\quad \varphi_1=\varphi(t_1),\quad \vartheta_1=\vartheta(t_1) \tag{4.3.26}$$

sont les valeurs des angles ψ, φ et ϑ à l'instant $t=t_1$.

La formule (4.3.23) prend dans ce cas la forme

$$\rho_1=\rho_0+\oint\sin\varphi\,d\vartheta \tag{4.3.27}$$

Ici ρ_1 est la valeur de l'angle ρ correspondant à l'instant $t=t_1$.

L'intégrale figurant au second membre de la dernière formule dépend de la forme de la courbe fermée dans le plan $\vartheta\varphi$, laquelle correspond au mouvement considéré du navire. La valeur ρ_1 dépend

donc de la nature du mouvement qui fait revenir le corps dans sa position de départ [1]).

Ainsi, la grandeur ρ ne peut pas servir de coordonnée angulaire du corps, par exemple d'angle déterminant la position du navire en azimut, c'est-à-dire par rapport aux points cardinaux. On sait (v. chap. I, § 1) qu'à cette fin on utilise la ligne de foi du navire qui est la projection de son axe longitudinal sur le plan horizontal. Relativement au problème étudié plus haut, on pourrait prendre l'axe y comme axe longitudinal et l'axe z comme axe vertical. Il est évident qu'après le retour du système de coordonnées xyz lié au navire dans la position initiale par rapport au système $\xi\eta\zeta$, la projection sus-mentionnée sera orientée exactement de la même façon qu'au commencement du mouvement. De même, l'angle d'embardée et le cap du navire (v. chap. I, § 1) resteront, eux aussi, inchangés.

Les difficultés que l'on rencontre lors de la détermination de l'orientation des corps à partir des différentes relations entre leurs vitesses angulaires, ainsi que lors de l'utilisation des valeurs courantes des vitesses angulaires et de leurs projections de toute sorte, peuvent se présenter dans certains problèmes de commande des mobiles. On peut citer notamment les questions de construction des navigateurs inertiels sans plate-forme stabilisée, les questions relatives à la précision des appareils complexes comportant plusieurs dispositifs gyroscopiques et au comportement des tachymètres gyroscopiques montés sur des supports mobiles.

§ 4. Dérives cinématiques d'un stabilisateur gyroscopique à trois axes

Le changement d'orientation des plates-formes stabilisées des stabilisateurs gyroscopiques à trois axes en présence de perturbations harmoniques peut être expliqué par des raisonnements analogues à ceux qui ont été développés au cours des paragraphes précédents du présent chapitre.

Considérons un stabilisateur gyroscopique à trois axes dont les gyroscopes sont installés sur la plate-forme stabilisée de la façon suivante (fig. 125). Les axes des boîtiers des gyroscopes I, II et III sont orientés le long des axes respectifs x, y et z du système de coordonnées xyz rigidement relié à la plate-forme stabilisée. Admettons que les moments cinétiques propres de tous les gyroscopes sont identiques et que dans la position de départ le moment cinétique propre

[1]) Une exception est faite pour un cas particulier où $\varphi = \pi/2$, lorsque l'intégrale curviligne (4.3.24) se transforme en une intégrale ordinaire. Pourtant, dans ce cas, le pont du navire pour lequel on peut prendre le plan xy reste constamment horizontal et la vitesse angulaire d'embardée devient naturellement égale à la composante verticale de la vitesse angulaire du navire.

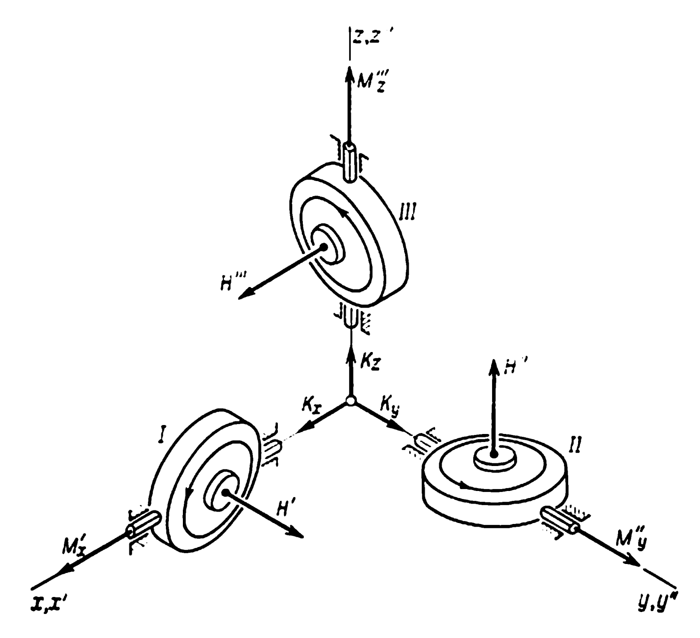


Fig. 125

du gyroscope I est dirigé parallèlement à l'axe y, celui du gyroscope II parallèlement à l'axe z et enfin celui du gyroscope III parallèlement à l'axe x. Désignons par ρ l'angle de rotation du boîtier du gyroscope I autour de l'axe x à partir de la position initiale (fig. 126). L'angle ρ sera considéré comme positif lorsque le boîtier tourne en sens inverse des aiguilles d'une montre, la rotation étant observée d'un point éloigné situé sur la partie positive de l'axe x. Introduisons de même des angles σ et τ caractérisant les rotations des boîtiers des gyroscopes II et III respectivement autour des axes y et z (v. fig. 126).

Attachons au boîtier du premier gyroscope un système de coordonnées $x'y'z'$ (fig. 127) de telle sorte que son axe x' soit orienté suivant l'axe x du système xyz lié à la plate-forme stabilisée et que les axes y' et z' soient, pour $\rho = 0$, parallèles respectivement aux axes y et z. Introduisons, d'une manière analogue, des systèmes de coordonnées $x''y''z''$ et $x'''y'''z'''$ liés respectivement aux boîtiers du deuxième et du troisième gyroscope (fig. 128 et 129). Lorsque $\sigma = 0$, les axes z'' et x'' sont respectivement parallèles aux axes z et x, alors que les axes x''' et y''' sont parallèles, lorsque $\tau = 0$, aux axes x et y.

Reportons-nous d'abord au gyroscope I. Désignons par $M_{x'} = M'_x$, $M_{y'}$ et $M_{z'}$ les moments résultants des forces exercées par la plate-forme stabilisée sur son boîtier (fig. 130). Ceci étant, $M'_{y'}$

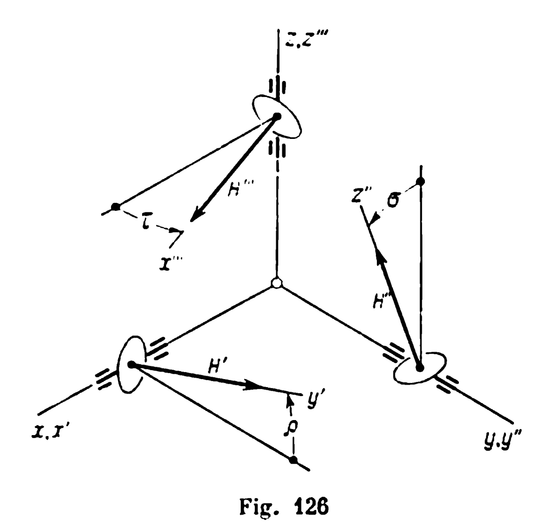


Fig. 126

et $M_{z'}$ sont les moments résultants par rapport aux axes y' et z' des forces de réaction des semelles de paliers de l'axe du boîtier et M'_x, le moment résultant par rapport à l'axe x, confondu avec l'axe x', produit par un sélecteur de moment placé sur la plate-forme stabilisée. Il est à noter que le moment résultant M'_x comprend aussi le moment des forces de frottement dans les paliers de l'axe du boîtier, que l'on pose égal à zéro dans tous les gyroscopes.

Par la suite, les moments résultants des forces seront le plus souvent appelés, comme précédemment, tout simplement moments.

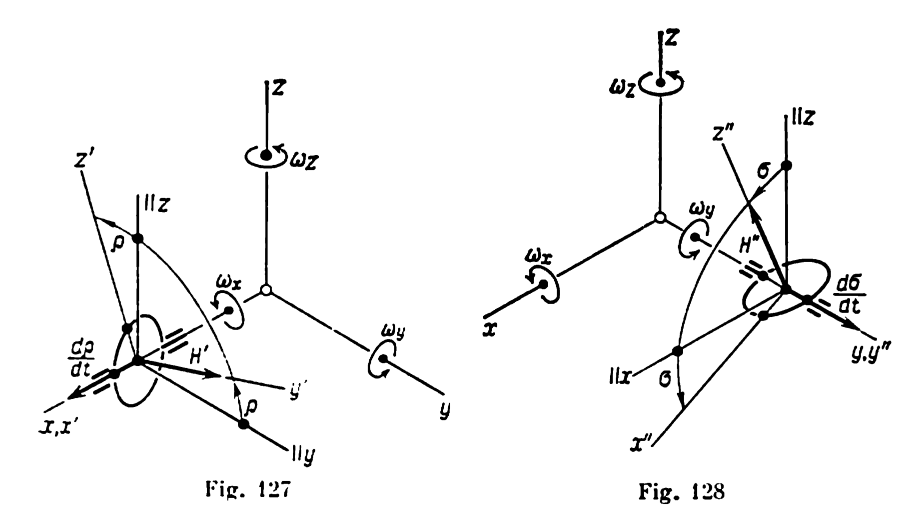


Fig. 127

Fig. 128

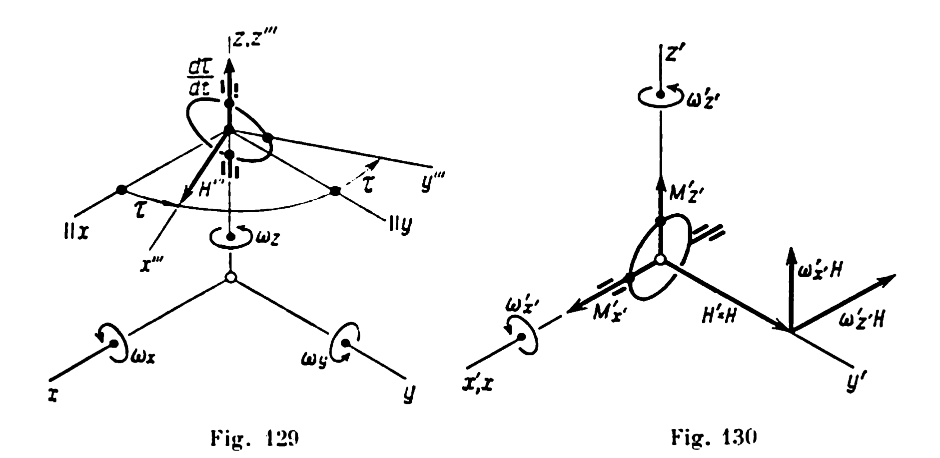


Fig. 129 Fig. 130

Au cours du paragraphe actuel, nous nous contenterons d'analyser les équations du mouvement du stabilisateur du point de vue de la théorie de précession des gyroscopes. D'après ce qui est établi au chapitre II du tome II, les équations du mouvement du gyroscope I peuvent s'écrire sous la forme suivante:

$$-\omega'_{z'}H = M'_{x'} = M'_x, \quad 0 = M'_{y'}, \quad \omega'_{x'}H = M'_{z'}. \qquad (4.4.1)$$

On suppose dans ce cas que le moment cinétique propre du premier gyroscope, comme celui du deuxième et du troisième, sont égaux à une même grandeur constante H.

Les équations (4.4.1) comportent, comme on le sait, une interprétation géométrique suivante (fig. 130). Le vecteur vitesse de l'extrémité du vecteur H orienté dans le cas du gyroscope I suivant l'axe y est égal au moment résultant des forces exercées sur le boîtier de ce gyroscope (par convention, l'origine du vecteur H est supposée immobile).

Les projections $\omega'_{z'}$ et $\omega'_{x'}$ de la vitesse angulaire ω' du boîtier du gyroscope I sur les axes respectifs z' et x' sont liées aux projections ω_x, ω_y et ω_z de la vitesse angulaire ω de la plate-forme stabilisée sur les axes x, y et z par les relations évidentes suivantes (v. fig. 127):

$$\begin{aligned} \omega'_{z'} &= -\omega_y \sin\rho + \omega_z \cos\rho, \\ \omega'_{x'} &= \omega'_x = \omega_x + \frac{d\rho}{dt}. \end{aligned} \qquad (4.4.2)$$

Ici, ρ est l'angle de rotation du boîtier du gyroscope I autour de l'axe x (x') par rapport à la plate-forme stabilisée, qui a déjà été introduit précédemment.

En opérant de façon identique, on peut établir les équations du mouvement des gyroscopes II et III. Pour le gyroscope II (fig. 131

et 128) on a les équations suivantes:

$$\omega''_{y''}H = M''_{x''}, \quad -\omega''_{x''}H = M''_{y''} = M''_{y}, \quad 0 = M''_{z''}, \tag{4.4.3}$$

dans lesquelles

$$\begin{aligned} \omega''_{x''} &= -\omega_z \sin\sigma + \omega_x \cos\sigma, \\ \omega''_{y''} &= \omega''_{y} = \omega_y + \frac{d\sigma}{dt} \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

sont les projections de la vitesse angulaire du boîtier du gyroscope II sur les axes x'' et y'' du système de coordonnées $x''y''z''$ lié à ce boîtier

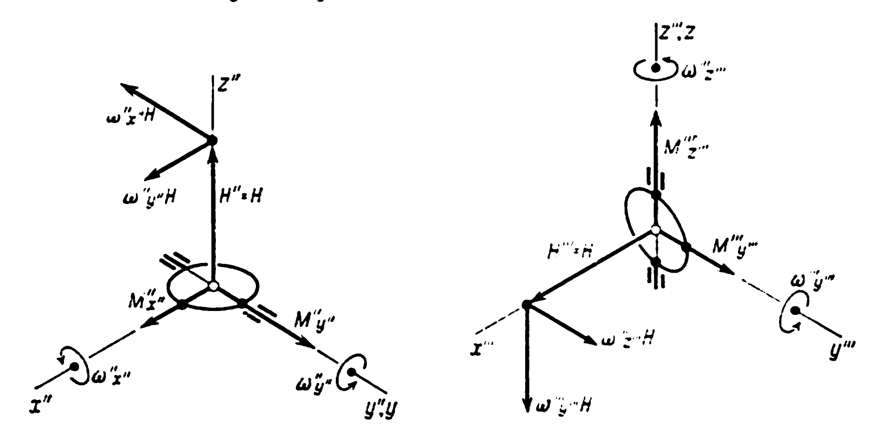


Fig. 131 Fig. 132

et $M''_{x''}$, $M''_{y''}$, $M''_{z''}$ sont les moments des forces exercées par la plate-forme stabilisée sur le boîtier du gyroscope II, le moment $M''_{y''} = M''_{y}$ étant imposé au moyen du sélecteur installé sur la plate-forme stabilisée ; σ est, comme il a été dit, l'angle de rotation du boîtier du gyroscope II autour de l'axe y (y'').

Enfin, il n'est pas difficile de se convaincre (fig. 132 et 129) que les équations du mouvement du gyroscope III se présentent sous la forme

$$0 = M'''_{x'''}, \quad \omega'''_{z'''}H = M'''_{y'''}, \quad -\omega'''_{y'''}H = M'''_{z'''} = M'''_{z}, \tag{4.4.5}$$

où

$$\begin{aligned} \omega'''_{y'''} &= -\omega_x \sin\tau + \omega_y \cos\tau, \\ \omega'''_{z'''} &= \omega'''_{z} = \omega_z + \frac{d\tau}{dt}. \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

Dans les dernières égalités, ω''' est la vitesse angulaire du boîtier du troisième gyroscope, $M'''_{x'''}$, $M'''_{y'''}$, $M'''_{z'''} = M'''_{z}$ sont les moments des forces exercées sur ce boîtier par la plate-forme stabilisée et τ

est l'angle, introduit plus haut, qui caractérise la rotation du boîtier autour de l'axe z (z''') par rapport à la plate-forme [1]).

Suivant le principe de Newton sur l'égalité de l'action et de la réaction, les boîtiers des gyroscopes I, II et III agissent sur la plate-forme stabilisée par l'intermédiaire des moments égaux en valeur absolue à $M'_{x'}$, $M'_{y'}$, $M'_{z'}$, $M''_{x''}$, $M''_{y''}$, $M''_{z''}$, $M'''_{x'''}$, $M'''_{y'''}$, $M'''_{z'''}$

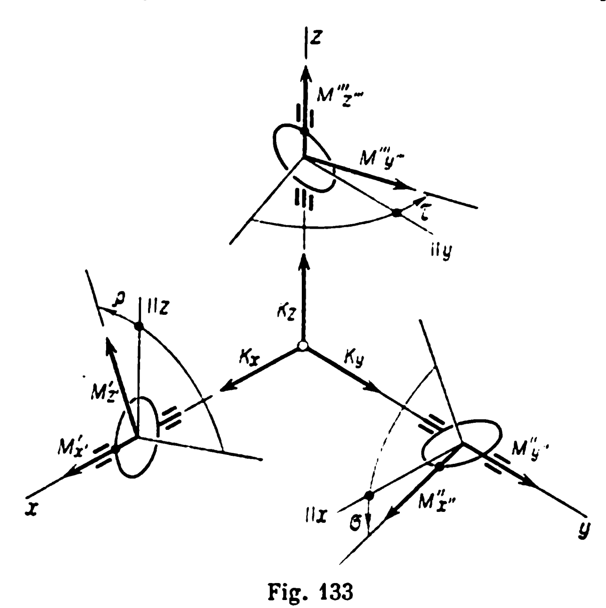


Fig. 133

(fig. 133) mais de sens contraires. En outre, la plate-forme stabilisée peut être soumise, de la part du support auquel elle est reliée par la suspension à la cardan (non représentée sur la fig. 133), à l'action des moments K_x, K_y, K_z dirigés respectivement le long des axes x, y et z liés à la plate-forme (v. fig. 125 et 133). Suivant la théorie de précession des gyroscopes (v. tome II, chap. II), on doit omettre, dans les équations du mouvement de la plate-forme, les moments d'inertie de sa masse.

Ainsi, tous les moments appliqués à la plate-forme doivent faire équilibre, ce qui donne finalement trois relations

$$
\begin{aligned}
&K_x - M'_{x'} - M''_{x''}\cos\sigma + M'''_{y'''}\sin\tau = 0,\\
&K_y - M''_{y''} - M'''_{y'''}\cos\tau + M'_{z'}\sin\rho = 0,\\
&K_z - M'''_{z'''} - M'_{z'}\cos\rho + M''_{x''}\sin\sigma = 0
\end{aligned}
\qquad (4.4.7)
$$

[1]) Comme il est aisé de le voir, les équations (4.4.1), (4.4.3) et (4.4.5) s'obtiennent l'une à partir de l'autre par une simple permutation cyclique. La même remarque s'applique également aux formules (4.4.2), (4.4.4) et (4.4.6).

qui tiennent compte du fait qu'en vertu des formules (4.4.1), (4.4.3) et (4.4.5) les moments $M'_{y'}$, $M''_{z''}$ et $M'''_{x'''}$ sont égaux à zéro et que de plus $M'_{x'} = M'_x$, $M''_{y''} = M''_y$ et $M'''_{z'''} = M'''_z$.

Introduisons maintenant dans les relations (4.4.7) les expressions des moments M'_x, M''_y, M'''_z, $M''_{x''}$, $M'''_{y'''}$ et $M'_{z'}$ données par les équations (4.4.1), (4.4.3) et (4.4.5). En outre, remplaçons $\omega'_{z'}$, $\omega'_{x'}$, $\omega''_{x''}$, $\omega''_{y''}$, $\omega'''_{y'''}$, $\omega'''_{z'''}$ par les seconds membres correspondants des formules (4.4.2), (4.4.4), (4.4.6). Nous obtenons trois équations

$$\left[\omega_y \sin\rho - \omega_z \cos\rho + \left(\omega_y + \frac{d\sigma}{dt}\right)\cos\sigma - \left(\omega_z + \frac{d\tau}{dt}\right)\sin\tau\right] H = K_x,$$

$$\left[\omega_z \sin\sigma - \omega_x \cos\sigma + \left(\omega_z + \frac{d\tau}{dt}\right)\cos\tau - \left(\omega_x + \frac{d\rho}{dt}\right)\sin\rho\right] H = K_y,$$

$$\left[\omega_x \sin\tau - \omega_y \cos\tau + \left(\omega_x + \frac{d\rho}{dt}\right)\cos\rho - \left(\omega_y + \frac{d\sigma}{dt}\right)\sin\sigma\right] H = K_z \qquad (4.4.8)$$

auxquelles il faut adjoindre encore trois équations

$$\begin{aligned} -(-\omega_y \sin\rho + \omega_z \cos\rho) H &= M'_x, \\ -(-\omega_z \sin\sigma + \omega_x \cos\sigma) H &= M''_y, \\ -(-\omega_x \sin\tau + \omega_y \cos\tau) H &= M'''_z. \end{aligned} \qquad (4.4.9)$$

Compte tenu des formules (4.4.2), (4.4.4) et (4.4.6), ces dernières représentent respectivement la première, la deuxième et la troisième équation des systèmes (4.4.1), (4.4.3) et (4.4.5).

Comme cela a été dit plus haut, les moments M'_x, M''_y et M'''_z figurant aux seconds membres des équations (4.4.9) sont appliqués aux axes des boîtiers des gyroscopes I, II et III (v. fig. 125 et 133); ils sont produits par les sélecteurs de moments installés sur la plate-forme stabilisée et servent à modifier son orientation par rapport au système de coordonnées non tournant. Par ailleurs, les moments K_x, K_y et K_z qui interviennent dans les équations (4.4.8) s'exercent sur la plate-forme elle-même; ils sont produits au moyen des sélecteurs de moments placés sur les axes de sa suspension à la cardan. Ils ont pour fonction principale d'équilibrer toute force qui peut agir sur la plate-forme en provoquant une augmentation indésirable des angles ρ, σ et τ. Ainsi, les moments énumérés ci-dessus sont dans une certaine mesure des grandeurs réglables dont la variation en fonction du temps et des autres paramètres déterminant l'état du système mécanique examiné doit être considérée, dans le cas général, comme connue. De ce fait, les équations (4.4.8) et (4.4.9) doivent être considérées comme un système de six équations qui décrivent, dans le cadre de la théorie de précession des gyroscopes, les mouvements angulaires d'une plate-forme stabilisée par rapport à un système de coordonnées non tournant, ainsi que le mouvement des gyroscopes I, II et III par rapport à la plate-forme.

Les projections ω_x, ω_y, ω_z de la vitesse angulaire absolue (c'est-à-dire par rapport au système de coordonnées non tournant) de la plate-forme s'expriment par les dérivées des angles d'Euler ψ, θ, φ (fig. 134) convenablement introduits ou par celles des angles d'Euler-Krylov α, β, γ (fig. 135), ainsi que par l'intermédiaire des angles eux-mêmes. Ainsi, le système (4.4.8)-(4.4.9) est un système de six équations différentielles du premier ordre par rapport aux angles

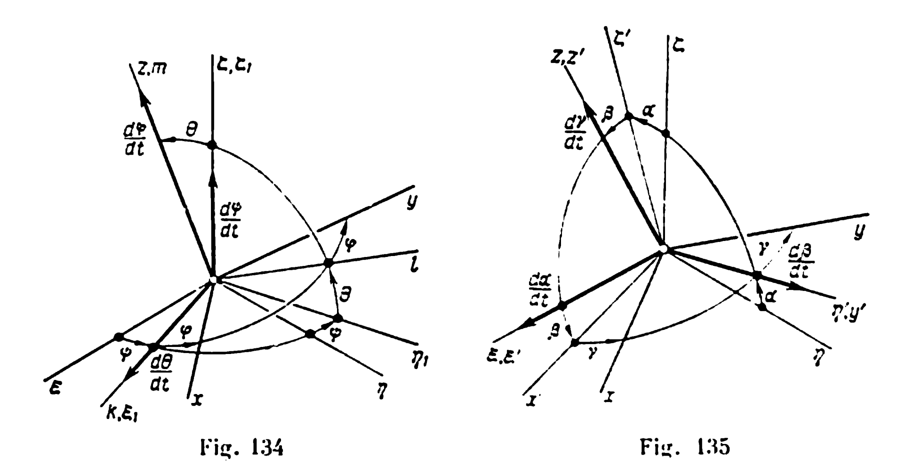


Fig. 134

Fig. 135

ρ, σ, τ et ψ, θ, φ (ou α, β, γ) qui déterminent la position du système de coordonnées xyz par rapport à un système non tournant $\xi\eta\zeta$. L'ordre de ce système peut, bien entendu, devenir nettement plus élevé si les seconds membres des équations (4.4.8) et (4.4.9) font intervenir des variables liées aux coordonnées principales du système mécaniqué considéré par des relations différentielles de la théorie de la régulation.

Considerons le cas où tous les moments appliqués aux axes des boîtiers des gyroscopes I, II et III sont nuls. En posant dans les équation (4.4.9)

$$M'_x = M''_y = M'''_z = 0, \qquad (4.4.10)$$

on obtient trois équations algébriques homogènes en ω_x, ω_y et ω_z:

$$\begin{aligned} -\omega_y \sin\rho + \omega_z \cos\rho &= 0, \\ -\omega_z \sin\sigma + \omega_x \cos\sigma &= 0, \\ -\omega_x \sin\tau + \omega_y \cos\tau &= 0. \end{aligned} \qquad (4.4.11)$$

Pour de faibles valeurs des angles ρ, σ et τ, le déterminant du système (4.4.11)

$$\Delta = \cos\rho\cos\sigma\cos\tau - \sin\rho\sin\sigma\sin\tau \qquad (4.4.12)$$

diffère de zéro et les équations (4.4.11) ont l'unique solution

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0. \qquad (4.4.13)$$

Ainsi donc, le fait que les moments M'_x, M''_y, M'''_z sont nuls implique d'après la théorie de précession des gyroscopes une stabilité absolue de la plate-forme, c'est-à-dire l'invariabilité de son orientation par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi\eta\zeta$[1]).

Supposons que les conditions (4.4.10) sont réalisées et que les angles ρ, σ et τ sont petits. Alors, en posant $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ dans les équations (4.4.8), on obtient les relations

$$\begin{aligned} H\left(\cos\sigma\frac{d\sigma}{dt} - \sin\tau\frac{d\tau}{dt}\right) &\simeq H\frac{d\sigma}{dt} = K_x,\\ H\left(\cos\tau\frac{d\tau}{dt} - \sin\rho\frac{d\rho}{dt}\right) &\simeq H\frac{d\tau}{dt} = K_y, \qquad (4.4.14)\\ H\left(\cos\rho\frac{d\rho}{dt} - \sin\sigma\frac{d\sigma}{dt}\right) &\simeq H\frac{d\rho}{dt} = K_z. \end{aligned}$$

Les moments K_x, K_y et K_z exercés par la suspension à la cardan sur la plate-forme stabilisée peuvent prendre, grace aux dispositifs électromécaniques, des valeurs pour lesquelles les angles ρ, σ et τ se réduisent à zéro. Admettons en particulier que ces moments s'expriment par les formules

$$K_x = -K\sigma, \quad K_y = -K\tau, \quad K_z = -K\rho, \qquad (4.4.15)$$

où K est une quantité constante (dite pente de caractéristique). On constate alors d'après les relations (4.4.14) que les angles ρ, σ et τ tendent vers zéro suivant une loi presque exponentielle. Il existe, bien entendu, de nombreuses autres lois de formation des moments, qui assurent une décroissance rapide des angles ρ, σ et τ. La limite de la vitesse admissible de décroissance de ces angles est déterminée ici par les conditions de stabilité dynamique du stabilisateur gyroscopique, ce qui n'est pas pris en considération dans la théorie de précession des gyroscopes.

Dans ce qui suit, nous supposerons que les dispositifs électromécaniques assurent une telle commande des valeurs des moments K_x, K_y et K_z que les angles ρ, σ et τ peuvent être considérés (après un certain phénomène transitoire) comme infiniment petits. Dans ces conditions, les équations (4.4.9) se mettent, avec une bonne approximation, sous une forme simple suivante:

$$-H\omega_z = M'_x, \quad -H\omega_x = M''_y, \quad -H\omega_y = M'''_z. \qquad (4.4.16)$$

[1]) Une exception est faite pour le cas du déterminant (4.4.12) nul, qui, à lui seul, présente de l'intérêt pour la mécanique des systèmes gyroscopiques. On démontre dans ce cas que si les angles ρ, σ, τ sont différents de zéro, les moments M'_z, M''_x et M'''_y sont coplanaires (c'est-à-dire que leurs vecteurs sont parallèles à un même plan), alors que la vitesse angulaire ω peut être arbitraire.

Les moments figurant aux seconds membres de ces équations étant supposés donnés, les projections ω_x, ω_y et ω_z de la vitesse angulaire de la plate-forme sur les axes du système de coordonnées xyz, qui lui est lié, doivent être considérées, elles aussi, en vertu des équations (4.4.16) comme fonctions connues du temps

$$\omega_x = \omega_x(t), \quad \omega_y = \omega_y(t), \quad \omega_z = \omega_z(t). \qquad (4.4.17)$$

La détermination de l'orientation du système xyz par rapport à un système de coordonnées non tournant $\xi\eta\zeta$ se ramène maintenant au problème connu de Darboux (v. tome II, chap. V, § 1). Examinons un des cas particuliers de ce problème, en posant

$$\omega_z = 0, \quad \omega_x = -\omega \sin pt, \quad \omega_y = \omega \cos pt, \qquad (4.4.18)$$

où ω et p sont des quantités positives constantes: ω est le module de la vitesse angulaire de la plate-forme, p est la pulsation du vecteur vitesse angulaire dans le plan xy (fig. 136).

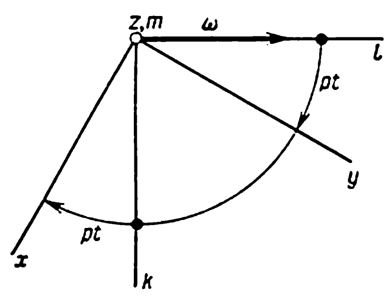


Fig. 136

En vertu des formules (4.4.16), le moment M_x' doit, dans ce cas, être nul et les moments M_y'' et M_z''' doivent varier suivant la loi

$$M_y'' = \omega H \sin pt, \qquad M_z''' = -\omega H \cos pt. \qquad (4.4.19)$$

Ceci étant, les moments K_x, K_y et K_z doivent être si efficaces que les angles ρ, σ, τ soient suffisamment petits pour que les équations (4.4.9) puissent être remplacées par les équations (4.4.16).

Introduisons un système de coordonnées non tournant $\xi\eta\zeta$ et déterminons, de deux façons différentes, la position du système de coordonnées xyz lié à la plate-forme stabilisée: d'abord, par l'intermédiaire des angles d'Euler ψ, θ, φ (v. fig. 134) et ensuite, par l'intermédiaire des angles d'Euler-Krylov α, β, γ (v. fig. 135). Dans le premier cas, la table des cosinus des angles formés entre les axes des systèmes xyz et $\xi\eta\zeta$ a la forme suivante:

	ξ	η	ζ
x	$-\sin\psi\cos\theta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi$	$\cos\psi\cos\theta\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi$	$\sin\theta\sin\varphi$
y	$-\sin\psi\cos\theta\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi$	$\cos\psi\cos\theta\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi$	$\sin\theta\cos\varphi$
z	$\sin\psi\sin\theta$	$-\cos\psi\sin\theta$	$\cos\theta$, (4.4.20)

alors que dans le second cas, elle est, comme il est facile de s'en assurer, de la forme

	ξ	η	ζ
x	$\cos\beta\cos\gamma$	$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+$ $+\cos\alpha\sin\gamma$	$-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+$ $+\sin\alpha\sin\gamma$
y	$-\cos\beta\sin\gamma$	$-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+$ $+\cos\alpha\cos\gamma$	$\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+$ $+\sin\alpha\cos\gamma$
z	$\sin\beta$	$-\sin\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha\cos\beta$.

(4.4.21)

La table (4.4.20) coïncide, à des désignations près, avec la table (3.5.24) obtenue au chap. III, § 5; il suffit seulement de remplacer les axes x^0, y^0, z^0 par ξ, η, ζ et de permuter les lignes avec les colonnes. De même, on peut obtenir la table (4.4.21) à partir de la table (3.6.1) si l'on y permute les noms des axes x, y, z et ξ, η, ζ.

Dans le premier cas (v. fig. 134), c'est-à-dire lorsque l'on se sert des angles classiques d'Euler ψ, θ, φ, la vitesse angulaire ω du corps est égale à la somme géométrique de trois vitesses angulaires: $d\psi/dt$ dirigée suivant l'axe ζ, $d\theta/dt$ orientée suivant la ligne des nœuds (ou, ce qui revient au même, suivant la droite d'intersection des plans $\xi\eta$ et xy, et confondue avec l'axe ξ lorsque l'angle ψ est nul) et enfin $d\varphi/dt$ dirigée suivant l'axe z. Il en résulte immédiatement les formules suivantes:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{d\psi}{dt}\sin\theta\sin\varphi+\frac{d\theta}{dt}\cos\varphi,\\ \omega_y &= \frac{d\psi}{dt}\sin\theta\cos\varphi-\frac{d\theta}{dt}\sin\varphi,\\ \omega_z &= \frac{d\psi}{dt}\cos\theta+\frac{d\varphi}{dt}\end{aligned}\qquad(4.4.22)$$

exprimant les projections de la vitesse angulaire de la plate-forme sur les axes du système xyz qui lui est lié.

Dans le second cas où l'on utilise les angles d'Euler-Krylov α, β et γ (v. fig. 135), la même vitesse angulaire ω du système xyz par rapport au système non tournant $\xi\eta\zeta$ est représentée par la somme géométrique de la vitesse angulaire $d\alpha/dt$ dirigée suivant l'axe ξ, de la vitesse angulaire $d\beta/dt$ dirigée suivant l'axe η' du système de coordonnées $\xi'\eta'\zeta'$ tourné de l'angle α autour des axes confondus ξ et ξ' par rapport au système $\xi\eta\zeta$ et enfin, de la vitesse angulaire $d\gamma/dt$ dirigée suivant l'axe z.

Pour trouver les cosinus des angles faits par l'axe η', que nous venons de mentionner, avec les axes x, y et z, il suffit de poser $\alpha = 0$ dans la table (4.4.21) et d'identifier les axes ξ', η', ζ' respectivement avec les axes ξ, η, ζ. En tenant compte de ces remarques et en

utilisant la table (4.4.21), il n'est pas difficile de représenter les projections ω_x, ω_y et ω_z de la vitesse angulaire de la plate-forme sur les axes x, y et z, qui lui sont liés, sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{d\alpha}{dt}\cos\beta\cos\gamma + \frac{d\beta}{dt}\sin\gamma, \\ \omega_y &= -\frac{d\alpha}{dt}\cos\beta\sin\gamma + \frac{d\beta}{dt}\cos\gamma, \\ \omega_z &= \frac{d\alpha}{dt}\sin\beta + \frac{d\gamma}{dt}. \end{aligned} \tag{4.4.23}$$

Dans le cas général traduit par les expressions (4.4.17), les égalités (4.4.22) et (4.4.23) doivent être considérées comme deux systèmes d'équations différentielles. La résolution de chacun d'eux permet de déterminer l'orientation courante du système xyz par rapport au système non tournant $\xi\eta\zeta$ si les fonctions du temps $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ sont connues et les conditions initiales correspondantes sont données. En un certain sens, les deux systèmes d'équations sont équivalents. En effet, si l'on trouve la solution de l'un d'eux, par exemple celle de (4.4.22), par rapport aux angles ψ, θ et φ, on peut, en comparant les tables (4.4.20) et (4.4.21), déterminer les angles α, β et γ en fonction du temps. Etant introduits dans le système d'équations (4.4.23), ces derniers les transformeront, bien entendu, en des identités.

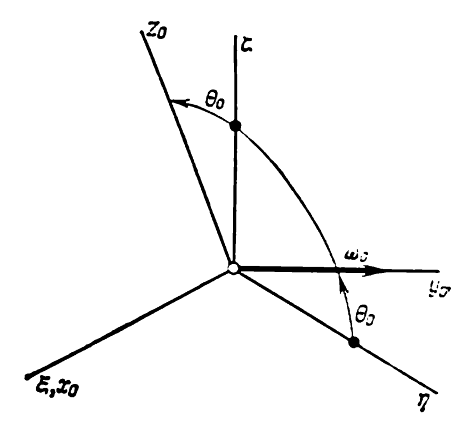


Fig. 137

Revenons au cas particulier (4.4.18). Le choix de la position du système non tournant $\xi\eta\zeta$ étant arbitraire, faisons coïncider son axe ξ avec la direction x_0 de l'axe x (lié à la plate-forme) que celui-ci avait à l'instant initial $t = 0$ (fig. 137). De ce fait, les valeurs initiales des angles d'Euler ψ et φ (v. fig. 134) dans les équations différentielles (4.4.22) seront

$$\psi(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0. \tag{4.4.24}$$

Désignons par $x_0y_0z_0$ la position du système xyz à l'instant $t = 0$ et orientons l'axe ζ de telle sorte qu'il fasse à cet instant avec l'axe z_0 un angle θ_0 dont la valeur se détermine par l'équation trigono-

métrique

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{\omega}{p}. \tag{4.4.25}$$

Ainsi, la valeur initiale de l'angle d'Euler θ est donnée par l'égalité

$$\theta(0) = \theta_0, \tag{4.4.26}$$

où θ_0 est la solution de l'équation (4.4.25), contenue dans l'intervalle] 0, π/2 .[Ainsi, on connaît toutes les conditions initiales pour un système d'équations différentielles suivant

$$\begin{gathered} \frac{d\psi}{dt} \sin\theta \sin\varphi + \frac{d\theta}{dt} \cos\varphi = -\omega \sin pt, \\ \frac{d\psi}{dt} \sin\theta \cos\varphi - \frac{d\theta}{dt} \sin\varphi = \omega \cos pt, \\ \frac{d\psi}{dt} \cos\theta + \frac{d\varphi}{dt} = 0 \end{gathered} \tag{4.4.27}$$

que l'on obtient à partir des équations (4.4.22) en y remplaçant ω_x, ω_y, ω_z par leurs expressions tirées des formules (4.4.18).

Il est aisé de s'assurer que, lorsque l'égalité (4.4.25) est vérifiée, les équations (4.4.27) admettent une solution suivante, satisfaisant aux conditions initiales (4.4.24) et (4.4.26):

$$\begin{gathered} \psi = \frac{\omega t}{\sin\theta_0} = \frac{pt}{\cos\theta_0}, \\ \varphi = -pt, \quad \theta = \theta_0 = \text{const}. \end{gathered} \tag{4.4.28}$$

Cette solution est unique. En effet, lorsqu'on effectue le passage des angles d'Euler aux paramètres de Rodrigues-Hamilton (v. tome II, chap. VI), les équations (4.4.22), de même que les équations (4.4.27), se transforment en des équations différentielles linéaires équivalentes. Or, la solution des équations différentielles linéaires est toujours unique.

Les formules (4.4.28) montrent que dans le cas considéré la ligne des nœuds k (v. fig. 134) tourne uniformément dans le plan $\xi\eta$ en sens inverse des aiguilles d'une montre, si on l'observe d'en haut, du côté de la partie positive de l'axe ζ. Quant au système de coordonnées xyz, il est animé, lui aussi, d'un mouvement uniforme autour de l'axe z par rapport à la ligne des nœuds, mais le module de la vitesse angulaire de ce mouvement est plus faible. Cette rotation se fait dans le sens des aiguilles d'une montre, c'est-à-dire dans le sens opposé au mouvement angulaire de la ligne des nœuds. C'est pourquoi, lorsque l'angle ψ augmente de 2π et l'axe z revient dans la position initiale, l'axe x ne reprend pas sa position de départ. Il résulte des deux premières formules (4.4.28) que

$$\varphi(\psi) = -\psi \cos\theta_0. \tag{4.4.29}$$

En y posant $\psi = 2\pi$, on obtient

$$\varphi(2\pi) = -2\pi \cos \theta_0, \qquad (4.4.30)$$

ce qui correspond à la rotation du système xyz de la position initiale (fig. 138) dans la position $x_1 y_1 z_1$, s'effectuant de l'angle

$$\chi = 2\pi (1 - \cos \theta_0) \qquad (4.4.31)$$

en sens inverse des aiguilles d'une montre. Or, c'est exactement la mesure Ω de l'angle solide du cône circulaire décrit par l'axe z

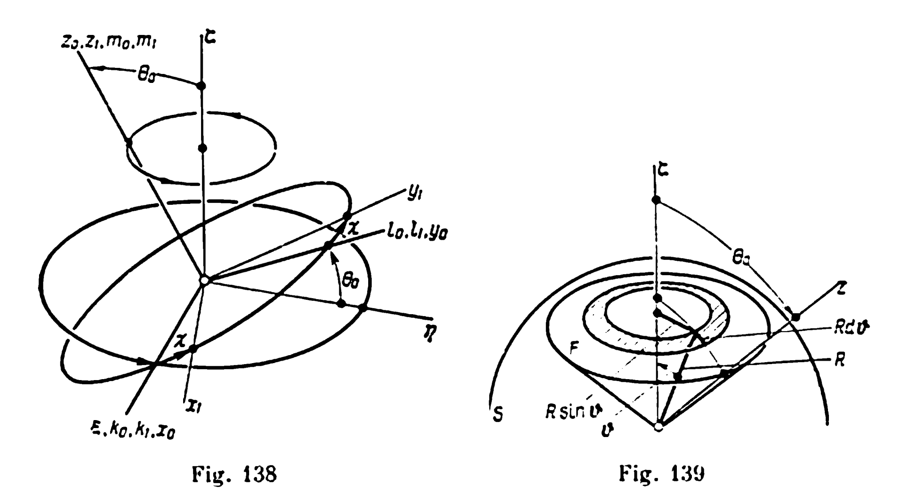


Fig. 138 Fig. 139

lorsque ce dernier tourne avec la ligne des nœuds autour de l'axe ζ. Pour démontrer cette proposition bien connue en géométrie élémentaire, il suffit de remarquer que l'aire d'une portion de la sphère de rayon R, découpée par le cône sus-mentionné (fig. 139) est représentée par l'intégrale

$$F = 2\pi \int_0^{\theta_0} R \sin \vartheta R \, d\vartheta = 2\pi R^2 (1 - \cos \theta_0) = R^2 \Omega. \qquad (4.4.32)$$

Ainsi, la formule (4.4.31) est un cas particulier de la formule (4.1.10) qui a été obtenue pour un cas plus général du mouvement du corps solide examiné au § 1 du présent chapitre.

Montrons maintenant comment on peut déterminer les angles d'Euler-Krylov α, β, γ dans le cas particulier examiné (4.4.18) du mouvement du solide, lorsqu'on connaît les angles classiques d'Euler (4.4.28) ψ, θ, φ. En comparant les cosinus des angles formés entre les axes de même nom des systèmes de coordonnées xyz et $\xi\eta\zeta$ dans les tables (4.4.20) et (4.4.21), on obtient, en particulier,

deux égalités suivantes:

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \sin\psi\sin\theta, \\ -\sin\alpha\cos\beta &= -\cos\psi\sin\theta \end{aligned} \tag{4.4.33}$$

qui permettent de déterminer successivement les angles β et α à partir des angles donnés ψ et θ. On suppose dans ce cas que les angles α et β s'annulent pour $\theta = 0$ et que l'angle θ est toujours inférieur à $\pi/2$. De plus, suivant les mêmes tables (4.4.20) et (4.4.21), on a

$$\begin{aligned} \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma &= \sin\theta\sin\varphi, \\ \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma &= \sin\theta\cos\varphi, \end{aligned} \tag{4.4.34}$$

ce qui permet de déterminer, de façon univoque, l'angle γ à partir des valeurs données des angles θ, φ et des valeurs précédemment trouvées des angles α et β. En se servant des quantités à valeurs complexes, on peut mettre les égalités (4.4.33) et (4.4.34) sous une forme plus compacte suivante:

$$\sin\alpha\cos\beta + i\sin\beta = \sin\theta\exp(i\psi), \tag{4.4.35}$$

et

$$(\sin\alpha + i\cos\alpha\sin\beta)\exp(-i\gamma) = \sin\theta\exp(-i\varphi). \tag{4.4.36}$$

En divisant membre à membre les égalités (4.4.35) et (4.4.36), on trouve que

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta + i\sin\beta}{\sin\alpha + i\cos\alpha\sin\beta}\exp(i\gamma) = \exp[i(\psi+\varphi)]. \tag{4.4.37}$$

La dernière relation permet de suivre la variation de l'angle γ, c'est-à-dire de l'un des angles d'Euler-Krylov, en fonction des angles classiques d'Euler ψ et φ. Notons d'abord que le module de la fraction au premier membre de la relation (4.4.37) est égal à l'unité, si bien que cette fraction peut se mettre sous la forme

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta + i\sin\beta}{\sin\alpha + i\cos\alpha\sin\beta} = \exp(i\delta). \tag{4.4.38}$$

En effectuant des transformations trigonométriques assez simples, on obtient maintenant la formule

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} \tag{4.4.39}$$

qui montre que l'argument δ de la fraction sus-mentionnée n'est pas grand.

Le rapprochement entre les tables (4.4.20) et (4.4.21) donne l'égalité suivante:

$$\cos\alpha\cos\beta = \cos\theta. \tag{4.4.40}$$

Compte tenu de cette dernière égalité, il n'est pas difficile de conclure que pour une valeur constante donnée de l'angle $\theta = \theta_0$ l'argument δ prend sa valeur maximale, lorsque $\alpha = \beta$. Dans ce cas,

$$\sin\alpha = \sin\beta = \sqrt{2}\sin\frac{\theta_0}{2},$$
$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\sin^2\frac{\theta_0}{2}}{\sqrt{\cos\theta_0}}, \qquad (4.4.41)$$

et donc pour les faibles valeurs de θ_0 l'argument δ est de deuxième ordre de petitesse. Lorsque les angles α et β sont nuls, l'argument δ s'annule, lui aussi, comme il en résulte de la formule (4.4.39).

Compte tenu des égalités (4.4.37) et (4.4.38), on arrive à la relation

$$\delta + \gamma = \psi + \varphi \qquad (4.4.42)$$

qui permet de trouver à l'aide des formules (4.4.33) et (4.4.39) l'angle γ, c'est-à-dire le dernier des angles cherchés d'Euler-Krylov.

Les formules (4.4.28) montrent qu'à l'instant initial $t = 0$ les angles ψ et φ sont tous deux nuls. Suivant la première formule (4.4.33), l'angle β est dans ce cas également nul. En vertu de la formule (4.4.39), l'argument δ est donc, lui aussi, nul. Dans ces conditions, la relation (4.4.42) donne

$$\gamma(0) = 0, \qquad (4.4.43)$$

où $\gamma(0)$ est la valeur de l'angle γ à l'instant initial.

Compte tenu des formules (4.4.28), (4.4.29) et (4.4.42), on a pour le cas particulier considéré

$$\gamma = (1-\cos\theta_0)\,\psi - \delta = \frac{1-\cos\theta_0}{\cos\theta_0}\,pt - \delta. \qquad (4.4.44)$$

L'angle δ étant petit, on peut considérer avec une bonne approximation que l'angle γ croît proportionnellement au temps. Comme il résulte des formules (4.4.33) et (4.4.39), les angles β et δ s'annulent de nouveau pour $\psi = 2\pi$ et l'axe z reprend sa position de départ par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi\eta\zeta$. La formule (4.4.44) s'accorde dans ce cas avec l'égalité (4.4.31).

Donnons, pour conclure, l'interprétation géométrique du mouvement d'un corps solide (plate-forme) dont la vitesse angulaire est donnée, conformément aux formules (4.4.18), par ses projections ω_x, ω_y et ω_z sur les axes x, y et z liés à ce corps.

Plaçons dans le plan xy un disque de rayon R, infiniment mince, rigidement relié au corps (fig. 140). Menons par un point de coordonnées

$$\xi = \eta = 0, \quad \zeta = -h = -R\sin\theta_0 \qquad (4.4.45)$$

un plan parallèle au plan $\xi\eta$ et faisons rouler le disque sans glissement sur ce plan. La vitesse du point de contact du disque avec le plan étant nulle par rapport à ce plan, donc par rapport au système $\xi\eta\zeta$, l'axe instantané de rotation du corps passe par ce point et, bien entendu, par l'origine commune des systèmes de coordonnées xyz et $\xi\eta\zeta$. Ainsi, le vecteur vitesse angulaire ω du corps, orienté suivant l'axe instantané de rotation, se situe en permanence dans le plan xy. Il en résulte la première des expressions (4.4.18), c'est-à-dire l'égalité à zéro de la projection ω_z de la vitesse angulaire du corps sur l'axe z du système de coordonnées xyz rigidement lié à ce corps.

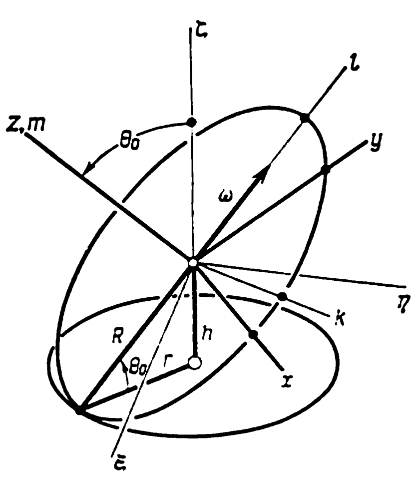


Fig. 140

Le rayon r de la circonférence sur laquelle roule le disque est inférieur au rayon R du disque et lié à ce dernier par la formule

$$r = R\cos\theta_0. \qquad (4.4.46)$$

Quand le disque aura parcouru toute cette circonférence et donc l'axe z sera revenu dans sa position de départ, le point de contact du disque avec le plan n'atteindra pas sur le disque sa position initiale: il en sera décalé de la longueur d'arc égale à la différence

$$s = 2\pi R - 2\pi r = 2\pi R\,(1 - \cos\theta_0). \qquad (4.4.47)$$

Par suite, le disque sera tourné autour de l'axe z, par rapport à la position initiale, d'un angle donné par la formule (4.4.31). En établissant cette formule par voie géométrique on n'a pas eu à utiliser les expressions (4.4.18) pour les projections ω_x et ω_y de la vitesse angulaire. Par conséquent, la formule (4.4.31) est vraie, quelle que soit la loi de variation $\omega = \omega(t)$ de la vitesse angulaire du disque roulant sans glisser sur un plan.

Déterminons maintenant, toujours par voie géométrique, la vitesse angulaire $d\psi/dt$ de rotation de l'axe z du disque autour de l'axe fixe ζ (fig. 141). A cet effet, prenons sur l'axe z un point A situé à la distance R (ou à une autre distance quelconque) du centre du disque. La vitesse angulaire instantanée ω du disque étant dirigée suivant l'axe l situé dans son plan (v. fig. 141), le vecteur vitesse du point A est parallèle au plan du disque et, comme il est facile

de voir, a pour valeur

$$v = \omega R. \qquad (4.4.48)$$

La direction négative de l'axe l passe constamment par le point de tangence du disque avec le plan parallèle au plan de coordonnées $\xi\eta$. Par suite, cet axe est perpendiculaire à la tangente commune à la circonférence du disque et à la circonférence de rayon r sur

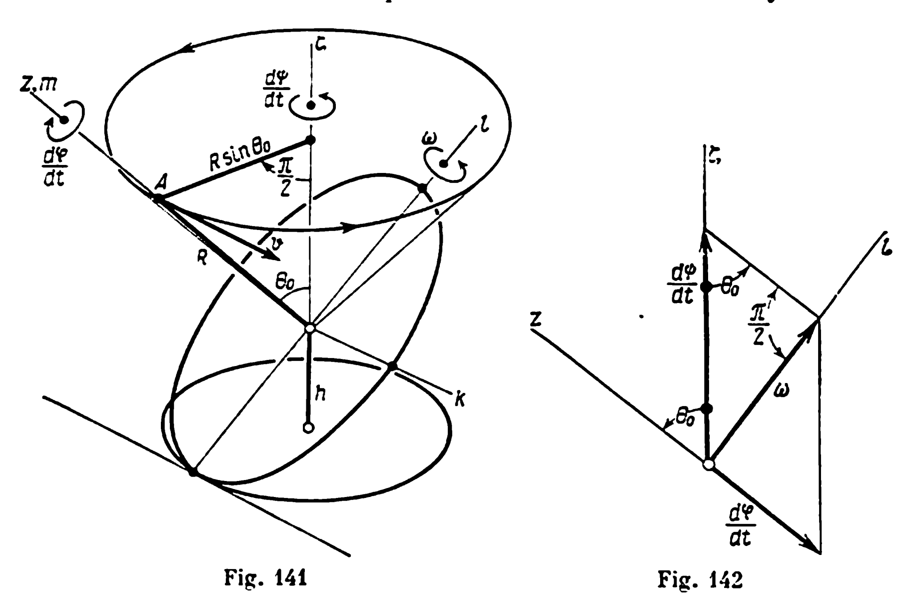


Fig. 141 Fig. 142

laquelle il roule. Il s'ensuit que l'axe l est perpendiculaire à la ligne des nœuds k, c'est-à-dire à la droite d'intersection des plans xy et $\xi\eta$ (v. fig. 140). En effet, le plan $\xi\eta$ étant parallèle au plan sur lequel roule le disque, le plan xy les coupe suivant deux droites parallèles. Il n'est pas difficile de se convaincre que le vecteur vitesse v est perpendiculaire à l'axe z et à l'axe l le long duquel est dirigée la vitesse angulaire ω du disque; par conséquent, il est parallèle à la ligne des nœuds k. Comme la vitesse $d\psi/dt$ de rotation de l'axe z autour de l'axe ζ est la même que celle de la ligne des nœuds k et de l'axe l (dit axe de Resal), la valeur de la même vitesse v (v. fig. 141) est donnée par l'expression

$$v = R \sin \theta_0 \frac{d\psi}{dt}, \qquad (4.4.49)$$

où $R \sin \theta_0$ est la distance du point A situé sur l'axe z à l'axe fixe ζ.

Le rapprochement entre les égalités (4.4.48) et (4.4.49) donne immédiatement (v. aussi fig. 142)

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega}{\sin \theta_0}, \qquad (4.4.50)$$

d'où il résulte la première des formules (4.4.28) si la valeur de ω est constante.

Après les remarques géométriques faites ci-dessus, la plupart des formules obtenues précédemment deviennent tout à fait claires.

§ 5. Petits mouvements d'un stabilisateur gyroscopique à trois axes

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de résoudre de façon approchée le problème qui consiste à déterminer le changement d'orientation d'une plate-forme stabilisée animée de petits mouvements angulaires dont la vitesse angulaire varie suivant une loi donnée. Conformément à la théorie de précession des gyroscopes, la vitesse angulaire de la plate-forme stabilisée est déterminée suivant les équations (4.4.16) du paragraphe précédent:

$$-\omega_z H = M'_x, \quad -\omega_x H = M''_y, \quad -\omega_y H = M'''_z \qquad (4.5.1)$$

par la donnée de la loi de variation, en fonction du temps, des moments M'_x, M''_y, M'''_z. Ces moments sont appliqués respectivement aux axes des boîtiers des gyroscopes I, II et III (v. fig. 125). Le problème posé ci-dessus se ramène à l'intégration du système de trois équations différentielles (4.4.23), soit

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt}\cos\beta\cos\gamma+\frac{d\beta}{dt}\sin\gamma&=\omega_x(t),\\ -\frac{d\alpha}{dt}\cos\beta\sin\gamma+\frac{d\beta}{dt}\cos\gamma&=\omega_y(t),\\ \frac{d\alpha}{dt}\sin\beta+\frac{d\gamma}{dt}&=\omega_z(t) \end{aligned} \qquad (4.5.2)$$

ou des équations analogues (4.4.22). Dans les équations (4.5.2), les projections $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$ et $\omega_z(t)$ de la vitesse angulaire de la plate-forme sur les axes x, y et z, qui lui sont liés, doivent être considérées comme fonctions connues du temps, et les angles d'Euler-Krylov α, β et γ (v. fig. 135) comme grandeurs cherchées. De plus, il est nécessaire que soient données les conditions initiales, c'est-à-dire les valeurs des angles α, β et γ à l'instant $t = 0$ que l'on prend pour instant de départ:

$$\alpha(0) = \alpha_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \gamma(0) = \gamma_0. \qquad (4.5.3)$$

Un choix convenable du système de coordonnées non tournant $\xi\eta\zeta$ par rapport auquel on détermine les angles α, β et γ, permet toujours d'obtenir que les valeurs α_0, β_0 et γ_0 de ces angles soient nulles. A cet effet, il suffit de faire coïncider à l'instant initial $t = 0$ les axes ξ, η, ζ respectivement avec les axes x, y, z.

Au cours du paragraphe qui précède, nous avons examiné en détail le problème de la détermination des angles classiques d'Euler ψ, θ et φ, ainsi que des angles d'Euler-Krylov α, β et γ dans le cas où les projections ω_x, ω_y et ω_z variaient suivant la loi la plus simple (4.4.18) et la valeur de ω_z était identiquement nulle. Maintenant, nous nous proposons de rechercher une solution approchée du système d'équations différentielles (4.5.2) par rapport aux angles d'Euler-Krylov α, β et γ dans le cas où les projections ω_x, ω_y et ω_z de la vitesse angulaire ont des valeurs arbitraires, suffisamment petites. A savoir, nous supposerons que leurs intégrales par rapport au temps, qui sont, comme il sera montré plus loin, des représentations approchées des angles cherchés α, β et γ, c'est-à-dire les fonctions

$$\Phi_x = \int_0^t \omega_x(t)\,dt, \quad \Phi_y = \int_0^t \omega_y(t)\,dt, \quad \Phi_z = \int_0^t \omega_z(t)\,dt, \tag{4.5.4}$$

restent petites devant l'unité dans tout intervalle de temps. Cette condition est satisfaite, en particulier, dans le cas où les fonctions $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ varient suivant une loi harmonique, à savoir:

$$\begin{aligned} \omega_x(t) &= \omega_x' \cos pt + \omega_x'' \sin pt, \\ \omega_y(t) &= \omega_y' \cos pt + \omega_y'' \sin pt, \\ \omega_z(t) &= \omega_z' \cos pt + \omega_z'' \sin pt. \end{aligned} \tag{4.5.5}$$

Ici ω_x', ω_x'', ω_y', ω_y'', ω_z', ω_z'' sont des constantes dont les rapports à la pulsation p sont supposés beaucoup plus petits que l'unité.

Développons les fonctions trigonométriques des angles β et γ figurant aux premiers membres des équations (4.5.2) en des séries entières et représentons ces équations sous la forme:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \omega_x(t) - \gamma\frac{d\beta}{dt} + A_1(\beta, \gamma)\frac{d\alpha}{dt} + B_1(\gamma)\frac{d\beta}{dt}, \\ \frac{d\beta}{dt} &= \omega_y(t) + \gamma\frac{d\alpha}{dt} + A_2(\beta, \gamma)\frac{d\alpha}{dt} + B_2(\gamma)\frac{d\beta}{dt}, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_z(t) - \beta\frac{d\alpha}{dt} + A_3(\beta)\frac{d\alpha}{dt}, \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

où $A_1(\beta, \gamma)$, $A_2(\beta, \gamma)$, $A_3(\beta)$, $B_1(\gamma)$, $B_2(\gamma)$ sont des séries infinies par rapport aux variables correspondantes, commençant par des termes d'ordre non inférieur au deuxième.

Les équations (4.5.6) peuvent être résolues par la méthode des approximations successives si l'on prend pour approximation de départ les fonctions (4.5.4). On a

$$\alpha = \Phi_x(t), \quad \beta = \Phi_y(t), \quad \gamma = \Phi_z(t). \tag{4.5.7}$$

Ceci étant, on doit avoir les conditions initiales suivantes:

$$\alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0) = 0. \qquad (4.5.8)$$

Pour obtenir l'approximation d'ordre suivant, représentons d'abord les équations (4.5.6), compte tenu des conditions initiales (4.5.8), sous la forme intégro-différentielle suivante:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \Phi_x(t) + \int_0^t \left[-\gamma \frac{d\beta}{dt} + A_1(\beta, \gamma) \frac{d\alpha}{dt} + B_1(\gamma) \frac{d\beta}{dt} \right] dt, \\
\beta &= \Phi_y(t) + \int_0^t \left[\gamma \frac{d\alpha}{dt} + A_2(\beta, \gamma) \frac{d\alpha}{dt} + B_2(\gamma) \frac{d\beta}{dt} \right] dt. \qquad (4.5.9) \\
\gamma &= \Phi_z(t) + \int_0^t \left[-\beta \frac{d\alpha}{dt} + A_3(\beta) \frac{d\alpha}{dt} \right] dt.
\end{aligned}$$

Introduisons maintenant les relations (4.5.7) dans les expressions à intégrer aux seconds membres des dernières égalités. En tenant compte de (4.5.4) et en ne gardant dans les expressions à intégrer que des termes du premier et du deuxième ordre en α, β, γ et en leurs dérivées par rapport au temps, on obtient la solution approchée suivante du problème posé:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \Phi_x(t) - \int_0^t \Phi_z(t)\,\omega_y(t)\,dt, \\
\beta &= \Phi_y(t) + \int_0^t \Phi_z(t)\,\omega_x(t)\,dt, \qquad (4.5.10) \\
\gamma &= \Phi_z(t) - \int_0^t \Phi_y(t)\,\omega_x(t)\,dt
\end{aligned}$$

Dans le cas où les projections de la vitesse angulaire $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$ et $\omega_z(t)$ varient suivant une loi harmonique définie par les égalités (4.5.5), on trouve, compte tenu des formules (4.5.4),

$$\begin{aligned}
\Phi_x &= \omega_x' \frac{\sin pt}{p} + \omega_x'' \frac{1-\cos pt}{p}, \\
\Phi_y &= \omega_y' \frac{\sin pt}{p} + \omega_y'' \frac{1-\cos pt}{p}, \qquad (4.5.11) \\
\Phi_z &= \omega_z' \frac{\sin pt}{p} + \omega_z'' \frac{1-\cos pt}{p}.
\end{aligned}$$

Portons maintenant les expressions (4.5.5) et (4.5.11) dans les formules (4.5.10). Il vient

$$\alpha = \omega_x' \frac{\sin pt}{p} + \omega_x'' \frac{1-\cos pt}{p} - \\ - \int_0^t \left(\omega_z' \frac{\sin pt}{p} + \omega_z'' \frac{1-\cos pt}{p}\right)(\omega_y' \cos pt + \omega_y'' \sin pt)\, dt,$$

$$\beta = \omega_y' \frac{\sin pt}{p} + \omega_y'' \frac{1-\cos pt}{p} + \\ + \int_0^t \left(\omega_z' \frac{\sin pt}{p} + \omega_z'' \frac{1-\cos pt}{p}\right)(\omega_x' \cos pt + \omega_x'' \sin pt)\, dt, \quad (4.5.12)$$

$$\gamma = \omega_z' \frac{\sin pt}{p} + \omega_z'' \frac{1-\cos pt}{p} - \\ - \int_0^t \left(\omega_y' \frac{\sin pt}{p} + \omega_y'' \frac{1-\cos pt}{p}\right)(\omega_x' \cos pt + \omega_x'' \sin pt)\, dt.$$

Après avoir calculé les intégrales figurant aux seconds membres des dernières formules, on y voit apparaître, en plus des termes contenant les fonctions trigonométriques de pt et $2pt$, encore des termes qui varient linéairement en fonction du temps. Les expressions (4.5.12) donnant les fonctions cherchées de α, β et γ peuvent donc se mettre sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \alpha &= (\omega_y'\omega_z'' - \omega_y''\omega_z') \frac{t}{2p} + \Phi_x^0, \\ \beta &= (\omega_z'\omega_x'' - \omega_z''\omega_x') \frac{t}{2p} + \Phi_y^0, \qquad (4.5.13) \\ \gamma &= (\omega_x'\omega_y'' - \omega_x''\omega_y') \frac{t}{2p} + \Phi_z^0. \end{aligned}$$

Ici, Φ_x^0, Φ_y^0, Φ_z^0 sont des fonctions périodiques du temps (y compris des quantités constantes). Leur période T s'exprime par la formule

$$T = \frac{2\pi}{p} \qquad (4.5.14)$$

Ainsi, dans le cas général où les projections $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ de la vitesse angulaire de la plate-forme stabilisée sur les axes x, y, z, qui lui sont liés, varient suivant la loi harmonique (4.5.5), le mouvement angulaire de la plate-forme est, comme le montrent les expressions (4.5.13), un mouvement composé. Il est le résultat de la superposition de deux mouvements dont l'un est caractérisé par une variation périodique des angles d'Euler-Krylov α, β et γ et l'autre, par une croissance ou décroissance linéaire de chacun

de ces angles. Ce dernier mouvement est généralement appelé *dérive angulaire systématique* de la plate-forme [1]). Ainsi, la dérive systématique se produit avec une vitesse angulaire constante. Suivant les formules (4.5.13) et (4.5.14), les accroissements des angles α, β et γ pendant le temps T sont:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= (\omega_y'\omega_z'' - \omega_y''\omega_z')\frac{\pi}{p^2},\\ \Delta\beta &= (\omega_z'\omega_x'' - \omega_z''\omega_x')\frac{\pi}{p^2},\\ \Delta\gamma &= (\omega_x'\omega_y'' - \omega_x''\omega_y')\frac{\pi}{p^2}.\end{aligned} \tag{4.5.15}$$

Appliquons les formules (4.5.15) à un cas particulier. Déterminons la dérive systématique du solide (plate-forme) dont la vitesse angulaire est donnée par les expressions (4.4.18) du paragraphe précédent. Avec les désignations adoptées dans le présent paragraphe, es expressions (4.5.5) donnent pour le même cas du mouvement

$$\omega_x' = \omega_y'' = \omega_z' = \omega_z'' = 0, \quad \omega_x'' = -\omega_y' = -\omega. \tag{4.5.16}$$

En introduisant les valeurs de ces grandeurs dans les formules (4.5.15), on obtient

$$\Delta\alpha = 0, \quad \Delta\beta = 0, \quad \Delta\gamma = \pi\frac{\omega^2}{p^2}. \tag{4.5.17}$$

Le même résultat pourrait s'obtenir à l'aide des formules (4.4.31) et (4.4.25). En effet, pour de faibles valeurs de l'angle θ_0 des axes z et ζ, celles-ci deviennent

$$\begin{aligned}\chi &= 2\pi(1-\cos\theta_0) \cong \pi\theta_0^2,\\ \operatorname{tg}\theta_0 &\cong \theta_0 \cong \frac{\omega}{p};\end{aligned} \tag{4.5.18}$$

d'où il résulte la relation approchée

$$\chi = \pi\frac{\omega^2}{p^2} \tag{4.5.19}$$

qui se confond au fait avec la troisième égalité (4.5.17). Rappelons que χ représente ici l'angle de rotation du solide autour de l'axe z,

---

[1]) Pour la dérive systématique d'une plate-forme stabilisée vibrante, voir, par exemple: *Зиненко В. А.* « О систематических уходах трёхосной гироскопической платформы, вызванных её угловыми колебаниями ».— Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 3 (*V. Zinenko.* Sur les dérives systématiques d'une plate-forme gyroscopique à trois axes, provoquées par ses oscillations angulaires (en russe)) et *Лунц Я. Л.* « О систематических уходах платформы трёхосного гидростабилизатора при колебаниях оснований ».— Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение, 1964, т. 7, № 4 (*Ya. Lounts.* « Sur les dérives systématiques de la plate-forme d'un gyrostabilisateur à trois axes dans le cas des oscillations des supports » (en russe)).

lorsque celui-ci revient dans sa position de départ après avoir décrit un cône. D'après ce qui a été établi au paragraphe précédent, la période T_1 du mouvement de l'axe z a pour valeur

$$T_1 = \frac{2\pi}{p} \cos \theta_0. \tag{4.5.20}$$

Le rapprochement entre les formules (4.5.20) et (4.5.14) montre que pour de faibles valeurs de l'angle θ_0 la période T_1 est pratiquement égale à la période T de la variation harmonique (4.5.5) des projections, sur les axes x, y et z, de la vitesse angulaire de la plate-forme stabilisée.

Suivant la formule (4.4.31) du paragraphe précédent, l'angle χ est égal à la mesure de l'angle solide du cône décrit par l'axe z au

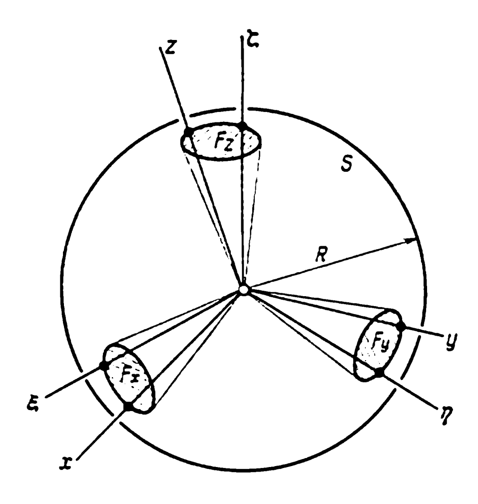


Fig. 143

cours de son mouvement périodique. Une interprétation géométrique analogue peut également être donnée aux formules (4.5.15) qui expriment la dérive de la plate-forme stabilisée pendant une période de variation des projections de la vitesse angulaire $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ pour des valeurs arbitraires, suffisamment petites de ω_x', ω_x'', ω_y', ω_y'', ω_z', ω_z''. Dans ces conditions, les angles d'Euler-Krylov α, β et γ peuvent être considérés, en vertu des formules (4.5.7) et (4.5.11), à des termes du deuxième ordre par rapport aux grandeurs qui viennent d'être énumérées près, comme fonctions périodiques du temps. On peut poser avec la même précision que les axes x, y, z liés à la plate-forme décrivent dans l'espace des surfaces coniques et leurs points d'intersection avec la sphère S, des courbes

sphériques fermées (fig. 143) [1]. Désignons par F_x, F_y et F_z les aires des surfaces limitées sur la sphère par ces courbes. Soient

$$\Omega_x = \frac{F_x}{R^2}, \quad \Omega_y = \frac{F_y}{R^2}, \quad \Omega_z = \frac{F_z}{R^2} \tag{4.5.21}$$

les mesures respectives des angles solides des cônes décrits pendant une période T par les axes x, y, z. Il se trouve que sont vérifiées les égalités

$$\Delta\alpha = \Omega_x, \quad \Delta\beta = \Omega_y, \quad \Delta\gamma = \Omega_z, \tag{4.5.22}$$

où $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ et $\Delta\gamma$ sont des grandeurs du deuxième ordre de petitesse par rapport aux angles α, β et γ, lesquelles caractérisent, suivant

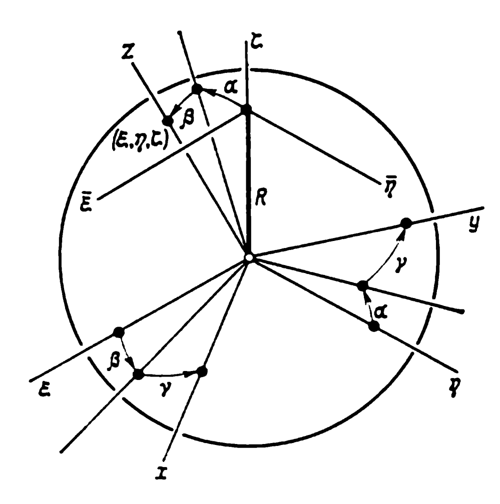


Fig. 144

les formules (4.5.15), la dérive angulaire systématique de la plate-forme pendant la même période T. Les égalités (4.5.22) contiennent, comme cas particulier, la relation (4.4.31) du paragraphe précédent.

Pour démontrer les égalités (4.5.22), considérons une des courbes sphériques mentionnées plus haut, par exemple celle qui est décrite par le point d'intersection de la sphère S avec l'axe mobile z. En utilisant la table (4.4.21) des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes de coordonnées xyz et $\xi\eta\zeta$ il n'est pas difficile de déterminer les coordonnées courantes ξ, η et ζ de ce point

[1]) Comme précédemment, la sphère S ne tourne pas et son centre est à l'origine commune du système non tournant $\xi\eta\zeta$ et du système mobile xyz. Plus loin, la lettre R désigne le rayon de cette sphère.

(fig. 144). On obtient à des termes du deuxième ordre près

$$\begin{aligned} \xi &= R\cos(\widehat{z,\ \xi}) = R\sin\beta \cong R\beta, \\ \eta &= R\cos(\widehat{z,\ \eta}) = -R\sin\alpha\cos\beta \cong -R\alpha, \qquad (4.5.23) \\ \zeta &= R\cos(\widehat{z,\ \zeta}) = R\cos\alpha\cos\beta \cong R, \end{aligned}$$

où α et β sont des fonctions du temps qui s'expriment par la première et la deuxième formule (4.5.7) et par les formules correspondantes (4.5.11). Les formules approchées (4.5.23) définissent une courbe située dans le plan $\zeta = R$ ou, ce qui revient au même, dans le plan $\bar{\xi}\bar{\eta}$ tangent à la sphère au point de son intersection avec l'axe ζ. Les coordonnées $\bar{\xi}$ et $\bar{\eta}$ des points de cette courbe sont égales, à des termes du deuxième ordre près, aux coordonnées ξ et η des points correspondants de la courbe sphérique considérée (fig. 145). De ce fait, l'aire d'une partie de la sphère limitée par la courbe sphérique peut être remplacée, avec la même précision, par l'aire d'une portion du plan $\zeta = R$ comprise à l'intérieur de la courbe plane sus-mentionnée (4.5.23) et donc, être représentée par l'intégrale connue

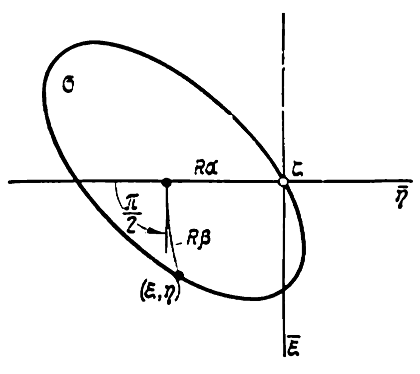


Fig. 145

$$F_z = \frac{1}{2}\oint \xi\, d\eta - \eta\, d\xi. \qquad (4.5.24)$$

La validité de la formule (4.5.24) peut être démontrée si l'on transforme son second membre suivant la formule de Green (4.1.20) indiquée au premier paragraphe du présent chapitre. En posant d'abord $\xi = x$ et $\eta = y$ et en revenant ensuite aux anciennes variables, on trouve que

$$\frac{1}{2}\oint \xi\, d\eta - \eta\, d\xi = \iint d\xi\, d\eta. \qquad (4.5.25)$$

L'intégrale double figurant au second membre de la dernière égalité est étendue au domaine σ limité par la courbe (4.5.23) et exprime donc, bien entendu, l'aire de ce domaine, c'est-à-dire F_z.

Les coordonnées ξ et η étant en première approximation des fonctions périodiques, le contour du domaine dans le plan $\bar{\xi}\bar{\eta}$ est

parcouru en une période T de leur variation. Par suite, la formule (4.5.24) peut se mettre sous la forme:

$$F_z = \frac{1}{2} \int_0^T \left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} \right) dt. \tag{4.5.26}$$

En tenant compte ici des formules approchées (4.5.23), (4.5.7) et (4.5.11), on obtient après intégration

$$F_z = \frac{\pi R^2}{p^2} (\omega_x' \omega_y'' - \omega_x'' \omega_y'). \tag{4.5.27}$$

Or, comme nous l'avons vu plus haut, le rapport de l'aire F_z au carré du rayon de la sphère S est la mesure de l'angle solide sous lequel on voit la courbe sphérique fermée décrite par le point d'intersection de l'axe z avec la sphère S, que nous avons considérée plus haut. Cet angle solide a été désigné par Ω_z. En comparant la formule (4.5.27) avec la troisième égalité (4.5.15), on obtient la troisième des relations (4.5.22). En procédant de la même façon, on peut s'assurer de la validité de la première et de la deuxième relation.

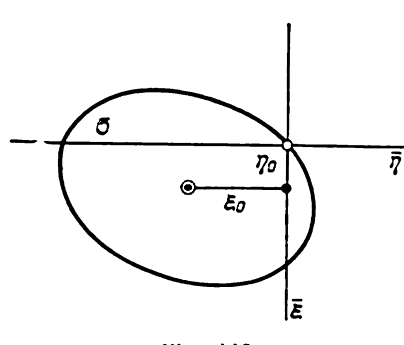


Fig. 146

Signalons que dans le cas où les coordonnées ξ et η varient suivant une loi harmonique, les formules approchées (4.5.23) déterminent les coordonnées courantes d'un point de l'ellipse située dans le plan $\zeta = R$ parallèle au plan $\xi\eta$ (fig. 146). En effet, si l'on tient compte des égalités (4.5.7) et (4.5.11), ces formules conduisent à la représentation de l'ellipse sous la forme paramétrique suivante:

$$\begin{aligned} \xi &= R \left(\omega_y' \frac{\sin pt}{p} + \omega_y'' \frac{1 - \cos pt}{p} \right), \\ \eta &= -R \left(\omega_x' \frac{\sin pt}{p} + \omega_x'' \frac{1 - \cos pt}{p} \right), \\ \zeta &= R. \end{aligned} \tag{4.5.28}$$

Le centre de l'ellipse (4.5.28) a pour coordonnées

$$\xi_0 = \frac{R\omega_y''}{p}, \quad \eta_0 = -\frac{R\omega_x''}{p}. \tag{4.5.29}$$

Dans le cas où

$$\frac{\omega_y'}{\omega_x'} = \frac{\omega_y''}{\omega_x''}, \tag{4.5.30}$$

l'ellipse (4.5.28) devient un segment de droite et son aire F_z s'annule, ce qui résulte également de la formule (4.5.27). Il s'ensuit que l'angle solide Ω_z s'annule, lui-aussi, en vertu des formules (4.5.21). Donc, comme le montrent les égalités (4.5.22), la plate-forme stabilisée voit disparaître sa dérive systématique $\Delta\gamma$ en angle γ, c'est-à-dire autour de l'axe ζ. Le même résultat découle, bien entendu, de la troisième formule (4.5.15) si l'on y pose que ω_x', ω_x'', ω_y', ω_y'' sont liés par la proportion (4.5.30).

L'ellipse (4.5.28) se transforme en une circonférence si

$$\omega_x' = \omega_y'', \quad \omega_x'' = -\omega_y'. \tag{4.5.31}$$

Le rayon r de cette circonférence est donné par la formule

$$r = \frac{R\omega}{p}, \tag{4.5.32}$$

où

$$\omega = \sqrt{(\omega_x')^2 + (\omega_x'')^2} = \sqrt{(\omega_y')^2 + (\omega_y'')^2}. \tag{4.5.33}$$

Suivant les formules (4.5.22), (4.5.21), (4.5.27) et les égalités (4.5.31), (4.5.33), la dérive de la plate-forme en une période se définit maintenant par

$$\Delta\gamma = \frac{\pi\omega^2}{p^2}. \tag{4.5.34}$$

Le même résultat peut aussi être obtenu de la troisième formule (4.5.15) si l'on tient compte des mêmes égalités (4.5.31) et (4.5.33).

La formule (4.5.34) est identique à la troisième formule (4.5.17) obtenue dans le cas particulier où ω_x', ω_x'', ω_y', ω_y'', ω_z', ω_z'' ont été donnés par les égalités (4.5.16). Il en découle que la non-nullité des ω_z' et ω_z'' ou, ce qui revient au même, la non-nullité de la projection ω_z de la vitesse angulaire de la plate-forme sur l'axe z, qui lui est lié, est sans effet sur la valeur de la dérive systématique de la plate-forme autour de cet axe.

Soit à comparer les conditions (4.5.16) et (4.5.31). Dans le cas de (4.5.16), ω_x' et ω_y'' sont nuls, et dans le cas de (4.5.31) ils prennent des valeurs arbitraires (égales l'une à l'autre). Dans les deux cas, le point d'intersection de l'axe z avec la sphère S se déplace suivant une circonférence. La seule différence entre les cas tient au transfert de l'origine des temps dans les formules (4.5.5). En effet, d'après les formules (4.5.5), aux conditions (4.5.16) correspondent les égalités

$$\omega_x = -\omega \sin pt, \quad \omega_y = \omega \cos pt, \quad \omega_z = 0. \tag{4.5.35}$$

Changeons ici l'origine des temps et posons

$$pt = pt_1 - \varepsilon. \tag{4.5.36}$$

Les deux premières égalités (4.5.35) deviennent

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega \sin \varepsilon \cos pt_1 - \omega \cos \varepsilon \sin pt_1, \\ \omega_y &= \omega \cos \varepsilon \cos pt_1 + \omega \sin \varepsilon \sin pt_1. \end{aligned} \tag{4.5.37}$$

Ainsi, suivant les formules générales (4.5.5), il convient de considérer que

$$\begin{aligned} \omega'_x &= \omega''_y = \omega \sin \varepsilon, \\ -\omega''_x &= \omega'_y = \omega \cos \varepsilon. \end{aligned} \tag{4.5.38}$$

Les dernières égalités sont en accord avec les conditions (4.5.31) et la formule (4.5.33). En outre, elles permettent de déterminer la valeur de ε.

Il est évident que, conformément aux formules du type (4.5.27), les égalités (4.5.21) et (4.5.22) sont également valables dans le cas d'une variation périodique quelconque (non nécessairement harmonique) des projections $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ de la vitesse angulaire. Dans ce cas, il est seulement nécessaire que le mouvement du solide par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi\eta\zeta$ soit, en première approximation, périodique et que les angles d'écart des axes x, y, z liés à la plate-forme stabilisée par rapport aux axes respectifs ξ, η et ζ soient petits.

Les formules (4.5.15) traduisant la dérive systématique d'une plate-forme stabilisée dans le cas de la variation harmonique (de faible amplitude) des projections $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ de sa vitesse angulaire sur les axes du système de coordonnées xyz, qui lui est lié, ont une grande importance pour les applications. Elles permettent d'évaluer l'amplitude maximale admissible de la variation harmonique de la vitesse angulaire de la plate-forme stabilisée pour une valeur limite donnée de sa dérive systématique.

La dérive angulaire systématique de la plate-forme stabilisée ne dépend pas évidemment du choix d'un système d'angles qui définit la position du système de coordonnées xyz lié à la plate-forme. Elle se détermine uniquement par les paramètres des fonctions harmoniques (4.5.5) suivant lesquels varient les projections de la vitesse angulaire de la plate-forme sur les axes x, y, z. Il est utile de s'en assurer directement et de vérifier ainsi la validité de ce qui a été établi au cours du présent paragraphe. A cet effet, choisissons un autre ensemble d'angles d'Euler-Krylov $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$. Supposons que le passage du système de coordonnées non tournant $\xi\eta\zeta$ dans la position du système xyz s'effectue par suite des rotations successives suivantes: d'une rotation d'angle $\tilde{\gamma}$ autour de l'axe ζ, d'une rotation d'angle $\tilde{\beta}$ autour de la nouvelle position de l'axe η et enfin, d'une rotation d'angle $\tilde{\alpha}$ autour de la position de l'axe ξ qu'elle prend après les deux rotations précédentes (c'est-à-dire autour de l'axe x).

Les angles $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ et $\tilde{\gamma}$ sont considérés comme positifs si les rotations qui leur correspondent autour des axes sus-mentionnés s'effectuent en sens inverse des aiguilles d'une montre, lorsqu'elles sont observées du côté de la partie positive de ces axes.

La table des cosinus des angles formés entre les axes des systèmes de coordonnées xyz et $\xi\eta\zeta$, exprimés par les angles $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ et $\tilde{\gamma}$, n'est

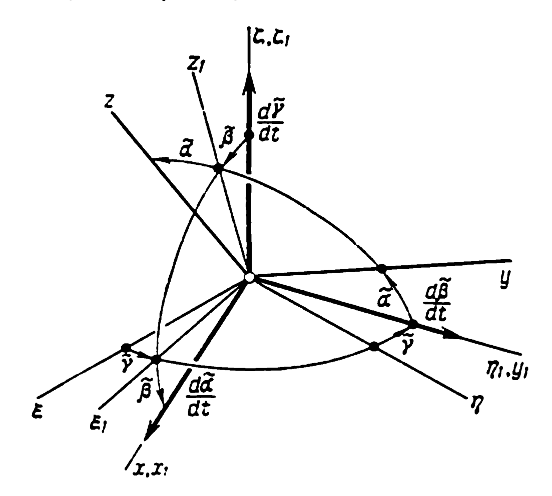


Fig. 147

pas difficile à composer si l'on se sert des règles exposées au chap. III, § 5. Elle est de la forme

$$\begin{array}{cccc}
 & \xi & \eta & \zeta \\
x & \cos\tilde{\beta}\cos\tilde{\gamma} & \cos\tilde{\beta}\sin\tilde{\gamma} & -\sin\tilde{\beta} \\
y & \sin\tilde{\alpha}\sin\tilde{\beta}\cos\tilde{\gamma}- & \sin\tilde{\alpha}\sin\tilde{\beta}\sin\tilde{\gamma}+ & \sin\tilde{\alpha}\cos\tilde{\beta} \\
 & -\cos\tilde{\alpha}\sin\tilde{\gamma} & +\cos\tilde{\alpha}\cos\tilde{\gamma} & \\
z & \cos\tilde{\alpha}\sin\tilde{\beta}\cos\tilde{\gamma}+ & \cos\tilde{\alpha}\sin\tilde{\beta}\sin\tilde{\gamma}- & \cos\tilde{\alpha}\cos\tilde{\beta}. \\
 & +\sin\tilde{\alpha}\sin\tilde{\gamma} & -\sin\tilde{\alpha}\cos\tilde{\gamma} &
\end{array} \qquad (4.5.39)$$

Le vecteur vitesse angulaire ω de la plate-forme stabilisée ou, ce qui revient au même, du système xyz, est la somme géométrique de trois vitesses angulaires relatives: $d\tilde{\gamma}/dt$ dirigée suivant l'axe ζ; $d\tilde{\beta}/dt$ dont la direction est celle de la nouvelle position de l'axe η après la rotation du système $\xi\eta\zeta$ de l'angle $\tilde{\gamma}$ autour de l'axe ζ et enfin, $d\tilde{\alpha}/dt$ dont le vecteur est porté par l'axe x (fig. 147).

La somme des projections des vitesses angulaires relatives $d\tilde{\alpha}/dt$, $d\tilde{\beta}/dt$ et $d\tilde{\gamma}/dt$ sur l'axe x (resp. y et z) est évidemment égale à la projection sur le même axe de leur somme géométrique, c'est-à-dire de la vitesse angulaire ω. Ainsi, en faisant usage de la table (4.5.39) et en tenant compte de la remarque que nous venons de faire sur la direction de la vitesse angulaire relative $d\tilde{\beta}/dt$, on obtient

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{d\tilde{\alpha}}{dt} - \frac{d\tilde{\gamma}}{dt} \sin\tilde{\beta}, \\ \omega_y &= \frac{d\tilde{\beta}}{dt} \cos\tilde{\alpha} + \frac{d\tilde{\gamma}}{dt} \sin\tilde{\alpha} \cos\tilde{\beta}, \\ \omega_z &= -\frac{d\tilde{\beta}}{dt} \sin\tilde{\alpha} + \frac{d\tilde{\gamma}}{dt} \cos\tilde{\alpha} \cos\tilde{\beta}. \end{aligned} \tag{4.5.40}$$

Pour calculer les projections sur les axes x, y, z de la vitesse angulaire relative $d\tilde{\beta}/dt$, il convient de trouver les cosinus des angles faits avec les axes x, y, z par la nouvelle position de l'axe η après la rotation du système $\xi\eta\zeta$ de l'angle $\tilde{\gamma}$. A cet effet, il faut poser $\tilde{\gamma} = 0$ dans la table (4.5.39) ; l'ancienne et la nouvelle positions de l'axe η s'en trouveront confondues.

Les égalités (4.5.40) peuvent être considérées comme équations différentielles servant à déterminer les angles $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ d'après les fonctions du temps données $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$. Leur forme est analogue à celle des équations (4.5.2) dans lesquelles les inconnues étaient les angles α, β et γ.

Les calculs effectués au cours de ce paragraphe ont été faits à des termes du deuxième ordre en α, β et γ et en leurs dérivées par rapport au temps près. Par conséquent, gardons dans les équations (4.5.40) les seuls termes du premier et du deuxième ordre en $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ et en leurs dérivées par rapport au temps. Il en résulte les équations approchées

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\alpha}}{dt} &= \omega_x(t) + \tilde{\beta} \frac{d\tilde{\gamma}}{dt}, \\ \frac{d\tilde{\beta}}{dt} &= \omega_y(t) - \tilde{\alpha} \frac{d\tilde{\gamma}}{dt}, \\ \frac{d\tilde{\gamma}}{dt} &= \omega_z(t) + \tilde{\alpha} \frac{d\tilde{\beta}}{dt}. \end{aligned} \tag{4.5.41}$$

En résolvant ces équations par la méthode des approximations successives, on peut prendre, en première approximation des angles $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ et $\tilde{\gamma}$, les mêmes fonctions du temps (4.5.4) qui ont été adoptées précédemment pour les angles α, β et γ. Dans ces conditions, les

valeurs initiales des nouveaux angles $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ et $\tilde{\gamma}$ seront nulles, de même que les valeurs initiales des angles α, β et γ. Ainsi, posons en première approximation

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= \int_0^t \omega_x(t)\,dt = \Phi_x(t),\\ \tilde{\beta} &= \int_0^t \omega_y(t)\,dt = \Phi_y(t),\\ \tilde{\gamma} &= \int_0^t \omega_z(t)\,dt = \Phi_z(t).\end{aligned} \tag{4.5.42}$$

Introduisons les expressions (4.5.42) dans les seconds membres des équations (4.5.41) et intégrons chacune d'elles par rapport au temps. Compte tenu des conditions initiales indiquées plus haut pour les fonctions cherchées $\tilde{\alpha}(t)$, $\tilde{\beta}(t)$, $\tilde{\gamma}(t)$, on obtient les formules correspondant à l'approximation du deuxième ordre:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= \Phi_x(t) + \int_0^t \Phi_y(t)\,\omega_z(t)\,dt,\\ \tilde{\beta} &= \Phi_y(t) - \int_0^t \Phi_x(t)\,\omega_z(t)\,dt,\\ \tilde{\gamma} &= \Phi_z(t) + \int_0^t \Phi_x(t)\,\omega_y(t)\,dt.\end{aligned} \tag{4.5.43}$$

On voit qu'elles sont analogues aux formules (4.5.10) pour les fonctions $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$.

Exprimons maintenant les fonctions $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ par l'intermédiaire de $\tilde{\alpha}(t)$, $\tilde{\beta}(t)$, $\tilde{\gamma}(t)$, à des termes du deuxième ordre par rapport aux dernières variables près. A cet effet, gardons dans les tables (4.4.21) et (4.5.39) des cosinus des angles formés entre les axes des systèmes xyz et $\xi\eta\zeta$ les seuls termes du premier et du deuxième ordre en α, β, γ et $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$. On obtient les tables

	ξ	η	ζ
x	$1-\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{2}\gamma^2$	$\gamma+\alpha\beta$	$-\beta+\gamma\alpha$
y	$-\gamma$	$1-\frac{1}{2}\gamma^2-\frac{1}{2}\alpha^2$	$\alpha+\beta\gamma$
z	β	$-\alpha$	$1-\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{1}{2}\beta^2$

(4.5.44)

et

	ξ	η	ζ
x	$1-\frac{1}{2}\tilde{\beta}^2-\frac{1}{2}\tilde{\gamma}^2$	$\tilde{\gamma}$	$-\tilde{\beta}$
y	$-\tilde{\gamma}+\tilde{\alpha}\tilde{\beta}$	$1-\frac{1}{2}\tilde{\gamma}^2-\frac{1}{2}\tilde{\alpha}^2$	$\tilde{\alpha}$
z	$\tilde{\beta}+\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}$	$-\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\tilde{\gamma}$	$1-\frac{1}{2}\tilde{\alpha}^2-\frac{1}{2}\tilde{\beta}^2.$

(4.5.45)

En comparant les coefficients homologues de ces tables, il n'est pas difficile de trouver les expressions cherchées qui donnent les angles α, β, γ par l'intermédiaire des angles $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$:

$$\alpha=\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}\tilde{\gamma},\quad \beta=\tilde{\beta}+\tilde{\gamma}\tilde{\alpha},\quad \gamma=\tilde{\gamma}-\tilde{\alpha}\tilde{\beta}. \tag{4.5.46}$$

Introduisons dans les seconds membres de ces égalités les expressions de $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ données par les formules (4.5.43). En ne gardant que des termes du premier et du deuxième ordre, on obtient

$$\begin{aligned}
\alpha&=\Phi_x(t)+\int_0^t \Phi_y(t)\,\omega_z(t)\,dt-\Phi_y(t)\,\Phi_z(t),\\
\beta&=\Phi_y(t)-\int_0^t \Phi_x(t)\,\omega_z(t)\,dt+\Phi_x(t)\,\Phi_z(t),\\
\gamma&=\Phi_z(t)+\int_0^t \Phi_x(t)\,\omega_y(t)\,dt-\Phi_x(t)\,\Phi_y(t).
\end{aligned} \tag{4.5.47}$$

Les formules (4.5.47) et (4.5.10) sont identiques, comme on peut s'en rendre compte facilement en appliquant la règle d'intégration par parties. Compte tenu des expressions (4.5.4), on obtient, en particulier

$$\int_0^t \Phi_y(t)\,\omega_z(t)\,dt=\int_0^t \Phi_y(t)\,\frac{d\Phi_z(t)}{dt}\,dt=$$
$$=\Phi_y(t)\,\Phi_z(t)-\int_0^t \Phi_z(t)\,\omega_y(t)\,dt. \tag{4.5.48}$$

Il en résulte que la première formule (4.5.47) se réduit immédiatement à la première formule (4.5.10). On peut effectuer des opérations

analogues sur les seconds membres de deux autres formules (4.5.47). Ainsi, les formules (4.5.10) et (4.5.47) représentent de façon différente la solution approchée d'un même problème de la détermination de l'orientation d'un solide d'après sa vitesse angulaire donnée, problème qui a une grande importance pour les applications. La solution (4.5.10) est exprimée à l'aide des angles ordinaires d'Euler-Krylov α, β, γ (v. fig. 135), alors que la solution (4.5.43) est rapportée à d'autres angles $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ et $\tilde{\gamma}$ (v. fig. 147). Chacun des ensembles des angles énumérés détermine à sa manière la position du système de coordonnées xyz lié au corps solide (plate-forme stabilisée) par rapport au système non tournant $\xi\eta\zeta$. La vitesse angulaire du solide est donnée, dans les deux cas, par les mêmes projections $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ sur les axes du système xyz qui lui est lié.

BIBLIOGRAPHIE

Боданский Е. Д., Фурман В. Д. О погрешностях численного интегрирования кинематических уравнений Пуассона (*E. Bodanski, V. Fourmann.* Sur les erreurs de l'intégration numérique des équations cinématiques de Poisson). — Космические исследования, 1970, т. 8, вып. 6 (en russe).

Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела (*V. Branets, I. Shmyglevski.* Application des quaternions à la résolution des problèmes d'orientation d'un corps solide). М., « Наука », 1973 (en russe).

Зиненко В. А. Об уходах гиростабилизированной платформы (*V. Zinenko.* Sur les dérives d'une plate-forme gyrostabilisée). — Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4 (en russe).

Ишлинский А. Ю. Механика специальных гироскопических систем (*A. Ishlinsky.* Mécanique des systèmes gyroscopiques spéciaux). Киев, Изд-во АН УССР, 1952 (en russe).

Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем (*A. Ishlinsky.* Mécanique des systèmes gyroscopiques). М., Изд-во АН СССР, 1963 (en russe).

Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа (*I. Kantor, A. Solodovnikov.* Nombres hypercomplexes). М., « Наука », 1973 (en russe).

Кучерков С. Г. Исследование кинематических уходов трехосного гиростабилизатора с помощью теории конечных поворотов (*S. Koutcherkov.* Etude des dérives cinématiques d'un gyrostabilisateur à trois axes à l'aide de la théorie des rotations finies). — Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение, 1969, т. 12, № 10 (en russe).

Меркин Д. Р. Гироскопические системы (*D. Merkine.* Systèmes gyroscopiques). Изд. 2-е. М., « Наука », 1974 (en russe).

Назаров Б. И. О погрешностях гиростабилизаторов (*B. Nazarov.* Sur les erreurs des gyrostabilisateurs). — Изв. АН СССР. ОТН. Техн. кибернетика, 1963, № 2 (en russe).

Новожилов И. В. Уходы трехосного силового гиростабилизатора в зависимости от расположения гироблоков на платформе (*I. Novojilov.* Dérives d'un gyrostabilisateur à trois axes en fonction de la position des groupes gyroscopiques sur la plate-forme). — Инж. ж. МТТ, 1968, № 2 (en russe).

Остромухов Я. Г., Ривкин С. С., Темченко М. Е. Геометрия и кинематика систем гироскопической стабилизации (*Ya. Ostromoukhov, S. Rivkine, M. Temtchenko.* Géométrie et cinématique des systèmes de gyrostabilisation). — Dans le recueil : Развитие механики гироскопических и инерци-

альных систем (Développement de la mécanique des systèmes gyroscopiques et inertiels). M., « Наука », 1973 (en russe).
Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ (*P. Rachevski*. Géométrie riemannienne et analyse tensorielle). M., Гостехиздат, 1953 (en russe).
Roberson R. E. Kinematical equations for bodies whose rotation is described by the Euler-Rodrigues parameter. — AIAA Journal, 1968, vol. 6, N° 5.
Whittaker E. T. A treatise on the analytical dynamics of particies and rigid bodies. 3rd ed. Cambridge, Univ. Press, 1927.

ANNEXE

Construction des projections des images géométriques à l'aide de matrices

En pratique et, en particulier, lors de l'étude de projets des suspensions à la cardan complexes, à plusieurs anneaux, portant les divers éléments des dispositifs gyroscopiques et autres, il devient souvent nécessaire de représenter sur un dessin, sous des angles de prise de vue différents, la vue générale d'une construction et de ses parties constitutives. A cet effet, on a élaboré, en géométrie descriptive, des procédés spéciaux qui se ramènent à une série de constructions géométriques effectuées à la règle et au compas. Or, le problème envisagé peut se résoudre également par une méthode purement analytique.

Associons à la construction un repère orthogonal direct xyz et désignons par x_h, y_h, z_h $(h = 1, 2, \ldots)$ les coordonnées des points caractéristiques qui déterminent la configuration de la construction. Si la construction présente la configuration d'un cube par exemple, pour de tels points on peut prendre ses sommets. Etant donné un système de coordonnées dont l'origine est au centre du cube et les axes sont parallèles à ses arêtes, les coordonnées x_h, y_h, z_h $(h = 1, 2, \ldots, 8)$ des points caractéristiques ou déterminants (dans le cas considéré, de huit sommets du cube) sont toutes les combinaisons possibles de nombres $x = \pm a$, $y = \pm a$, $z = \pm a$. Ici, a est la demi-longueur de l'arête du cube.

Un arc de circonférence ou d'une autre courbe faisant partie de la configuration de la construction peut être représenté par un ensemble d'un nombre suffisamment grand de ses points. En particulier, un arc égal à un quart de la circonférence, situé dans le premier quadrant du plan xy et ayant son centre à l'origine du système de coordonnées xyz peut être donné par l'ensemble des points $x_h = r \cos(\pi/2n)\, h$, $y_h = r \sin(\pi/2n)\, h$, $z_h = 0$ $(h = 0, 1, 2, \ldots \ldots, n)$ [1]). Ici, n est le nombre de points de subdivision du quart de la circonférence en petits arcs égaux.

---

[1]) Un autre procédé permettant la donnée d'une circonférence est indiqué en fin de la présente annexe.

17—01005

Enfin, dans le cas le plus simple, pour représenter un segment de longueur l issu de l'origine des coordonnées, il est naturel de prendre pour points caractéristiques son origine $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et son extrémité ayant des coordonnées données $x = a$, $y = b$, $z = c$. On a évidemment dans ce cas

$$a^2 + b^2 + c^2 = l^2. \tag{1}$$

Il est clair que la vue de la construction et, dans le cas plus simple, celle du système de coordonnées ou du schéma de la suspension à la cardan, considérée du côté de la partie positive de l'axe z est déterminée par l'ensemble des coordonnées x_h, y_h des points déterminants mentionnés plus haut. Par analogie, elle se détermine par l'ensemble des coordonnées y_h, z_h si on l'observe du côté de l'axe x et enfin, par l'ensemble des coordonnées z_h, x_h si on le fait du côté de l'axe y. Pourtant, comme il a été dit au début de la présente annexe, il est utile de savoir déterminer la vue générale de la construction, prise du côté d'un axe quelconque dont l'orientation par rapport au système de coordonnées xyz est arbitraire. Dans ce qui suit, nous allons justement étudier la méthode analytique utilisée pour représenter des configurations de ce genre. Les exemples donnés traitent uniquement des systèmes de coordonnées et des circonférences, lesquels déterminent d'ailleurs la configuration de nombreuses constructions.

Par la suite, il sera commode de considérer que le système xyz modifie son orientation par rapport à un système fixe $\xi\eta\zeta$. Supposons que les origines de ces systèmes sont confondues et que la position du système xyz par rapport au système $\xi\eta\zeta$ est déterminée par la table des cosinus

$$\begin{array}{cccc} & \xi & \eta & \zeta \\ x & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ y & k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ z & k_{31} & k_{32} & k_{33}. \end{array} \tag{2}$$

Rapportons au système $\xi\eta\zeta$ les points déterminants introduits plus haut. Leurs coordonnées ξ_h, η_h, ζ_h $(h = 1, 2, \ldots, n)$ peuvent être calculées à l'aide des formules bien connues

$$\begin{aligned} \xi_h &= k_{11}x_h + k_{21}y_h + k_{31}z_h, \\ \eta_h &= k_{12}x_h + k_{22}y_h + k_{32}z_h, \\ \zeta_h &= k_{13}x_h + k_{23}y_h + k_{33}z_h. \end{aligned} \tag{3}$$

Il est évident que l'ensemble des coordonnées ξ_h, η_h $(h = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n)$ détermine la vue de la construction du côté de la partie positive de l'axe ζ. D'une manière analogue, l'ensemble des coor-

données η_h, ζ_h le fait du côté de l'axe ξ, et l'ensemble des coordonnées ζ_h, ξ_h, du côté de l'axe η.

S'il est nécessaire de juger de la vue de la construction du côté du seul axe ζ dont l'orientation par rapport au système de coordonnées xyz est donnée, le choix des directions des deux autres axes ξ et η n'est limité que par la condition que ξ, η et ζ définissent un repère orthogonal direct.

Voyons comment changera la vue de la construction du côté de l'axe ζ du système $\xi\eta\zeta$ si la construction toute entière ou une de ses parties tourne avec le système xyz autour d'un axe quelconque passant par leur origine commune et prend une nouvelle position $x'y'z'$. Pour plus de clarté, désignons par $x^0y^0z^0$ la position de départ du système xyz.

Le système de coordonnées xyz lié à la construction occupe après la rotation mentionnée, la position $x'y'z'$. Par conséquent, les coordonnées des points déterminants par rapport au système $x'y'z'$ sont les mêmes que celles rapportées au système xyz, c'est-à-dire que

$$x'_h = x_h, \quad y'_h = y_h, \quad z'_h = z_h. \tag{4}$$

Pourtant, dans le système $x^0y^0z^0$, les coordonnées des points déterminants changent leurs valeurs. Introduisons la table

$$\begin{array}{cccc} & x^0 & y^0 & z^0 \\ x' & l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ y' & l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ z' & l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{array} \tag{5}$$

des cosinus des angles que font entre eux les axes du système xyz dans leurs positions nouvelle et ancienne (respectivement $x'y'z'$ et $x^0y^0z^0$). D'après la table (5), les coordonnées des points déterminants rapportées au système $x^0y^0z^0$ sont données par les formules de changement de coordonnées bien connues:

$$\begin{aligned} x_h^0 &= l_{11}x'_h + l_{21}y'_h + l_{31}z'_h, \\ y_h^0 &= l_{12}x'_h + l_{22}y'_h + l_{32}z'_h, \\ z_h^0 &= l_{13}x'_h + l_{23}y'_h + l_{33}z'_h. \end{aligned} \tag{6}$$

En y remplaçant, conformément aux égalités (4), les coordonnées x'_h, y'_h et z'_h respectivement par x_h, y_h et z_h, on obtient les formules

$$\begin{aligned} x_h^0 &= l_{11}x_h + l_{21}y_h + l_{31}z_h, \\ y_h^0 &= l_{12}x_h + l_{22}y_h + l_{32}z_h, \\ z_h^0 &= l_{13}x_h + l_{23}y_h + l_{33}z_h. \end{aligned} \tag{7}$$

Les coordonnées des points déterminants par rapport au système fixe $\xi\eta\zeta$ changeront, elles aussi, de valeur. Désignons-les par ξ'_h, η'_h, ζ'_h. Pour déterminer ces dernières, il faut, dans les formules (3), remplacer les coordonnées x_h, y_h, z_h par des coordonnées de même nom x_h^0, y_h^0, z_h^0 et affecter de prime ξ_h, η_h et ζ_h. Il vient

$$
\begin{aligned}
\xi'_h &= k_{11}x_h^0 + k_{21}y_h^0 + k_{31}z_h^0,\\
\eta'_h &= k_{12}x_h^0 + k_{22}y_h^0 + k_{32}z_h^0,\\
\zeta'_h &= k_{13}x_h^0 + k_{23}y_h^0 + k_{33}z_h^0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Dans les dernières égalités, il est nécessaire de remplacer x_h^0, y_h^0, z_h^0 par les seconds membres des formules (7). Après la réduction des termes semblables, on obtient

$$
\begin{aligned}
\xi'_h &= q_{11}x_h + q_{21}y_h + q_{31}z_h,\\
\eta'_h &= q_{12}x_h + q_{22}y_h + q_{32}z_h,\\
\zeta'_h &= q_{13}x_h + q_{23}y_h + q_{33}z_h.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Ici,

$$
\begin{aligned}
q_{11} &= l_{11}k_{11} + l_{12}k_{21} + l_{13}k_{31},\\
q_{21} &= l_{21}k_{11} + l_{22}k_{21} + l_{23}k_{31},\\
q_{31} &= l_{31}k_{11} + l_{32}k_{21} + l_{33}k_{31}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

etc., et dans le cas général

$$q_{ij} = l_{i1}k_{1j} + l_{i2}k_{2j} + l_{i3}k_{3j} = l_{i\sigma}k_{\sigma j}, \tag{11}$$

où $i, j = 1, 2, 3$ [1]).

Les q_{ij} figurant dans les formules (9) représentent les cosinus des angles formés entre les axes du système xyz dans sa nouvelle position $x'y'z'$ et les axes du système fixe $\xi\eta\zeta$. Il est évident qu'après la rotation la vue de la construction du côté de la partie positive de l'axe ζ, par exemple, est déterminée par l'ensemble des coordonnées ξ'_h, η'_h calculées d'après les formules (9). Introduisons les matri-

---

[1]) On a utilisé ici le symbole de sommation sur un indice σ que l'on appelle indice « muet » (introduit pour la première fois par A. Einstein. Voir: *A. Einstein*. « Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie ».— Ann. der Physik, 1916, Bd. 4, H. 4), soit:

$$l_{i\sigma}k_{\sigma j} = \sum_{\sigma=1}^{3} l_{i\sigma}k_{\sigma j} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

ces [1])

$$K = \begin{array}{c|ccc|} & \xi & \eta & \zeta \\ x^0 & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ y^0 & k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ z^0 & k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{array}, \qquad L = \begin{array}{c|ccc|} & x^0 & y^0 & z^0 \\ x' & l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ y' & l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ z' & l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{array}, \tag{12}$$

$$Q = \begin{array}{c|ccc|} & \xi & \eta & \zeta \\ x' & q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ y' & q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ z' & q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{array}.$$

Il est facile de voir qu'en vertu des formules (10) et (11) la matrice Q est le produit de la matrice K multipliée à gauche par la matrice L, c'est-à-dire qu'on a l'égalité matricielle suivante:

$$Q = LK. \tag{13}$$

En effet, d'après les formules (11), les coefficients de la matrice Q résultent de la « multiplication » des lignes de la matrice L par les colonnes de la matrice K, ce qui caractérise justement (v. chap. III, § 7) le produit matriciel (13).

Supposons que la construction, qui a déjà subi une rotation, effectue une rotation supplémentaire autour d'un nouvel axe qui passe, lui aussi, par l'origine commune des systèmes de coordonnées xyz et $\xi\eta\zeta$. Pareillement à ce que nous avons fait pour la première rotation, désignons par $x''y''z''$ la nouvelle position du système xyz lié à la construction et confondu avec le système $x'y'z'$ avant que la nouvelle rotation ne commence. Soit

$$M = \begin{array}{c|ccc|} & x' & y' & z' \\ x'' & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ y'' & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ z'' & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{array} \tag{14}$$

la matrice dont les éléments sont les cosinus des angles formés entre les axes x'', y'', z'' et x', y', z'. Il n'est pas difficile de montrer la validité des formules

$$\begin{aligned} \xi_h'' &= r_{11}x_h + r_{21}y_h + r_{31}z_h, \\ \eta_h'' &= r_{12}x_h + r_{22}y_h + r_{32}z_h, \\ \zeta_h'' &= r_{13}x_h + r_{23}y_h + r_{33}z_h, \end{aligned} \tag{15}$$

[1]) Les lettres x^0, y^0, z^0 et ξ, η, ζ jointes à la matrice K (v. chap. III, § 7) permettent de rendre plus commode l'interprétation de cette matrice comme table des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes $x^0y^0z^0$ et $\xi\eta\zeta$. Cette remarque s'applique également aux matrices L, Q et autres qui seront introduites par la suite.

où ξ''_h, η''_h, ζ''_h sont les coordonnées par rapport au système $\xi\eta\zeta$ qu'ont les points déterminants de la construction (ou d'une de ses parties) après les deux rotations de cette dernière; x_h, y_h, z_h les coordonnées des mêmes points dans le système xyz lié à la construction. Quant aux coefficients r_{ij} intervenant dans les formules (15), ils forment une matrice

$$R = \begin{matrix} \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{matrix} \begin{matrix} \xi & \eta & \zeta \\ \left\| \begin{matrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{matrix} \right\| \end{matrix} \tag{16}$$

qui est le produit matriciel

$$R = MLK. \tag{17}$$

L'ensemble des coordonnées ξ''_h, η''_h détermine la vue de la construction (ou d'une quelconque de ses parties) du côté de la direction positive de l'axe ζ, après deux rotations indiquées.

La matrice L prend une forme particulièrement simple dans le cas où l'axe de rotation de la construction (ou d'une quelconque de ses parties) est confondu avec l'un des axes x^0, y^0 ou z^0. Dans ce cas, un des axes, respectivement x, y ou z, du système xyz lié à la construction reste fixe lors de la rotation et la matrice L se transforme en une des matrices élémentaires $A = A\ (\alpha)$, $B = B\ (\beta)$ ou $C = C\ (\gamma)$ que nous avons étudiées au chap. III, § 7. Il en est de même de la matrice M et des matrices analogues qui décrivent les rotations successives, si l'axe de rotation correspondant coïncide chaque fois avec l'un des axes des systèmes de coordonnées intermédiaires (par exemple, dans le cas de la matrice M, avec l'un des axes x', y' ou z'). La multiplication par de telles matrices est facile à effectuer. De plus, le produit des matrices quelconques (à condition que leur ordre ne soit pas trop élevé) peut être calculé d'après des programmes existants, pratiquement sur toutes les machines mathématiques rapides [1]).

Etant donné des repères orthogonaux directs, disposés différemment dans l'espace et déduits l'un de l'autre par suite des rotations successives autour des axes de coordonnées quelconques, proposons-nous d'étudier leur représentation plane à l'aide des procédés décrits plus haut.

Soit encore $\xi\eta\zeta$ un système de coordonnées fixe. Dirigeons son axe ζ perpendiculairement au plan de la figure. Par ailleurs, soit

---

[1]) Le cas où les rotations successives se font autour des axes non coplanaires n'est nullement plus compliqué. Chaque fois qu'un tel cas se présente, il faut effectuer une translation sypplémentaire de la construction et du système de coordonnées xyz qui lui est lié, pour que l'axe de rotation passe constamment par l'origine du système $\xi\eta\zeta$.

$x^0y^0z^0$ la position initiale du système xyz lié à la construction, dans laquelle les axes x^0, y^0, z^0 forment un même angle avec l'axe ζ ou, ce qui revient au même, des angles égaux avec le plan $\xi\eta$, et de plus, l'axe z^0 est situé dans le plan $\eta\zeta$ (fig. 148). Il est facile de s'assurer que la table des cosinus des angles formés entre les axes des

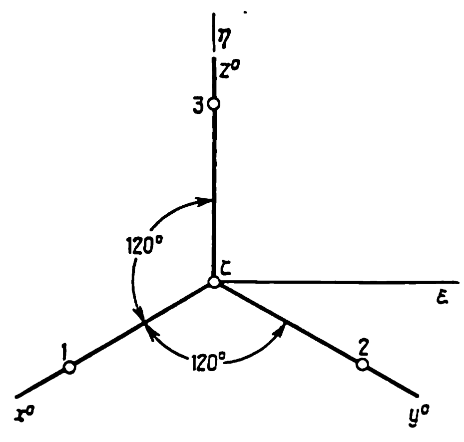


Fig. 148

systèmes $x^0y^0z^0$ et $\xi\eta\zeta$ aura alors la forme de la table (2), où il convient de remplacer les axes x, y, z par les axes x^0, y^0, z^0 et de poser

$$k_{11} = -k_{21} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad k_{31} = 0,$$
$$k_{12} = k_{22} = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \qquad k_{32} = \frac{2}{\sqrt{6}}, \tag{18}$$
$$k_{13} = k_{23} = k_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

En effet, du fait de ce qui précède, les cosinus des angles que l'axe ζ fait avec les axes x^0, y^0, z^0 sont égaux par hypothèse et la somme de leurs carrés est égale à l'unité. Par conséquent,

$$k_{13}^2 + k_{23}^2 + k_{33}^2 = 1. \tag{19}$$

En outre, l'axe z^0 étant perpendiculaire à l'axe ξ, on peut écrire

$$k_{31} = \cos(\widehat{z^0, \xi}) = 0. \tag{20}$$

La dernière égalité (18) et l'égalité (20) permettent de déterminer k_{32} puisqu'à son tour

$$k_{31}^2 + k_{32}^2 + k_{33}^2 = 1. \tag{21}$$

De la relation évidente

$$k_{11}k_{13} + k_{21}k_{23} + k_{31}k_{33} = 0 \tag{22}$$

et des égalités précédentes il résulte que les quantités k_{11} et k_{21} ont même module et des signes contraires. De plus, il est évident que

$$k_{11}^2 + k_{21}^2 = 1. \tag{23}$$

En opérant de façon analogue ou en appliquant directement les méthodes de résolution des problèmes de la géométrie dans l'espace, il n'est pas difficile de calculer les modules de tous les coefficients (18) et de déterminer leurs signes.

Ainsi, conformément aux égalités (18), la matrice K introduite plus haut se présente sous la forme suivante:

$$K = \begin{matrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{matrix} \begin{Vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Vmatrix} . \quad (\text{colonnes } \xi, \eta, \zeta) \tag{24}$$

Comme points déterminants de la construction et en occurrence du système de coordonnées xyz, prenons les points *1*, *2*, *3* situés respectivement sur les axes x, y et z de ce système et distants de l'unité par rapport à son origine, c'est-à-dire les points de coordonnées (1, 0, 0), (0, 1, 0) et (0, 0, 1). En partant des égalités (18), on calcule aisément les coordonnées des points *1*, *2* et *3* dans le système $\xi\eta\zeta$, soit

$$\begin{aligned} &\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -0{,}707, && \eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}} = -0{,}408, && \zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577, \\ &\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707, && \eta_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}} = -0{,}408, && \zeta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577, \\ &\xi_3 = 0, && \eta_3 = \frac{2}{\sqrt{6}} = 0{,}817, && \zeta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577. \end{aligned} \tag{25}$$

En effet, la projection sur un axe quelconque d'un segment unité situé sur un autre axe est égale au cosinus de l'angle formé entre ces axes. Le calcul à l'aide de la formule (3), compte tenu des mêmes égalités (18), donnerait évidemment les mêmes valeurs des ξ_i, η_i et ζ_i ($i = 1, 2, 3$).

L'ensemble des valeurs des coordonnées ξ_1, η_1; ξ_2, η_2; ξ_3, η_3 permet de construire les projections sur le plan $\xi\eta$ des trois axes du système xyz dans sa position de départ $x^0y^0z^0$ ou, ce qui revient

au même, d'établir la vue du système xyz dans la position $x^0y^0z^0$, du côté de la partie positive de l'axe ζ.

Proposons-nous maintenant d'examiner comment se modifiera la vue générale du système xyz du côté de la partie positive de l'axe ζ, lors de ses différentes rotations à partir de la position initiale et des positions intermédiaires suivantes. D'abord, faisons tourner le système xyz se trouvant dans sa position de départ $x^0y^0z^0$, d'un

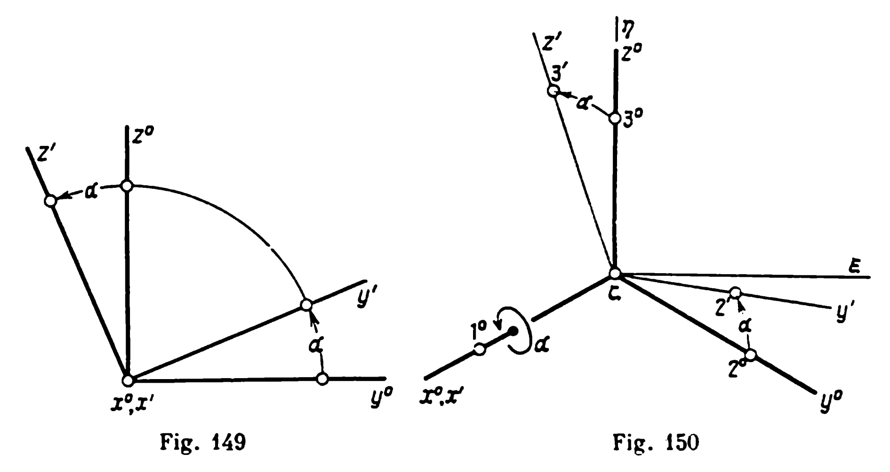


Fig. 149 Fig. 150

angle α autour de l'axe x confondu avec l'axe x^0. Il en résultera le passage au système de coordonnées $x'y'z'$ dont l'axe x' est confondu avec l'axe x^0 (fig. 149 et 150). A cette rotation on peut faire correspondre la table

$$\begin{array}{cccc} & x^0 & y^0 & z^0 \\ x' & 1 & 0 & 0 \\ y' & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ z' & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{array} \qquad (26)$$

des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes $x'y'z'$ et $x^0y^0z^0$.

L'angle α figurant dans la table (26) est positif si, en passant de la position $x^0y^0z^0$ dans la position $x'y'z'$, le système xyz a tourné en sens inverse des aiguilles d'une montre pour un observateur regardant la rotation de la partie positive de l'axe x. Le rapprochement entre la table (26) et la deuxième matrice (12) permet de conclure que dans le cas considéré cette matrice est de la forme

$$L = \begin{array}{c} \\ x' \\ y' \\ z' \end{array} \begin{array}{ccc} x^0 & y^0 & z^0 \\ \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{array} \right\| \end{array}. \qquad (27)$$

Au chap. III, § 7, cette matrice a été désignée par $A = A(\alpha)$. Elle correspondait à la rotation du trièdre *abc* autour de l'arête *a* de l'angle α. Compte tenu de la formule (13), nous obtenons maintenant

$$Q = AK, \tag{28}$$

où Q est la troisième matrice (12); elle correspond au changement de coordonnées suivant les formules (9).

Après la rotation du système xyz de l'angle α dans la position $x'y'z'$, les points déterminants *1*, *2* et *3* (v. fig. 148 et 150 [1])) se trouveront placés sur les axes x', y' et z' toujours à une distance de l'origine des coordonnées, égale à l'unité. Il s'ensuit que leurs coordonnées dans le système $x'y'z'$ seront exactement les mêmes que dans le système xyz, c'est-à-dire (1, 0, 0), (0, 1, 0) et (0, 0, 1). Par suite, conformément aux formules (9), les nouvelles coordonnées $\xi_1', \eta_1', \zeta_1'; \xi_2', \eta_2', \zeta_2'; \xi_3', \eta_3', \zeta_3'$ des points *1*, *2*, *3* dans le système $\xi\eta\zeta$ ont pour expressions

$$\begin{aligned} \xi_1' &= q_{11}, & \eta_1' &= q_{12}, & \zeta_1' &= q_{13}, \\ \xi_2' &= q_{21}, & \eta_2' &= q_{22}, & \zeta_2' &= q_{23}, \\ \xi_3' &= q_{31}, & \eta_3' &= q_{32}, & \zeta_3' &= q_{33}. \end{aligned} \tag{29}$$

Ici, q_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ sont, comme précédemment, les éléments de la matrice Q.

La vue du système $x'y'z'$ du côté de la partie positive de l'axe ζ est déterminée par des points situés dans le plan $\xi\eta$ et ayant comme coordonnées (q_{11}, q_{12}), (q_{21}, q_{22}) et (q_{31}, q_{32}).

Imposons maintenant au système xyz une rotation suivante, cette fois à partir de la position $x'y'z'$. Supposons que cette nouvelle rotation s'effectue de l'angle β autour de l'axe y'' confondu avec l'axe y'. Désignons par $x''y''z''$ la nouvelle position du système de coordonnées xyz (fig. 151 et 152). L'angle β sera considéré comme positif si la rotation que nous venons de décrire s'effectue en sens inverse des aiguilles d'une montre si on la regarde du côté de la partie positive de l'axe y' (y''). D'après ce qui a été établi au chap. III, § 7, à une telle rotation correspond la matrice

$$B = B(\beta) = \begin{matrix} \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} x' & \quad y' & \quad z' \end{matrix} \\ \left\| \begin{matrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{matrix} \right\| \end{matrix}. \tag{30}$$

Plus haut, pour décrire la rotation supplémentaire qui suit la rotation principale de la construction, nous avons introduit la

[1]) Dans la fig. 150, les nouvelles positions des points *2*, *3* sont désignées par *2'*, *3'* et les anciennes par *2*°, *3*°. Le point *1* reste inchangé, dans la position *1*°.

matrice M ayant la forme (14). On voit aisément que son rôle est joué maintenant par la matrice B (β). En substituant dans la formule (17) les matrices A et B respectivement aux matrices L et M, nous obtenons

$$R = BAK. \tag{31}$$

Ici, R est la matrice (16) dont les coefficients sont les cosinus des angles formés entre les axes des systèmes de coordonnées $x''y''z''$ et $\xi\eta\zeta$.

Les points déterminants *1*, *2* et *3* du système xyz, lorsque ce dernier aura effectué les deux rotations indiquées, ont dans le système

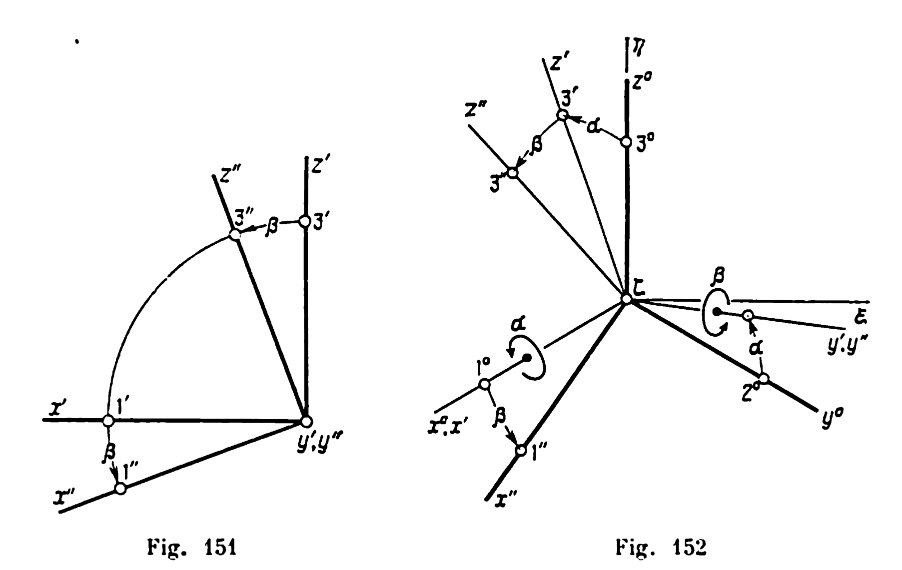


Fig. 151 Fig. 152

$x''y''z''$ les mêmes coordonnées respectives (1, 0, 0), (0, 1, 0) et (0, 0, 1) que dans le système xyz. En utilisant les formules (15), nous obtenons maintenant pour les coordonnées de ces points dans le système $\xi\eta\zeta$ les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} \xi_1'' &= r_{11}, & \eta_1'' &= r_{12}, & \zeta_1'' &= r_{13}, \\ \xi_2'' &= r_{21}, & \eta_2'' &= r_{22}, & \zeta_2'' &= r_{23}, \\ \xi_3'' &= r_{31}, & \eta_3'' &= r_{32}, & \zeta_3'' &= r_{33}. \end{aligned} \tag{32}$$

Il est évident que les points de coordonnées (r_{11}, r_{12}), (r_{21}, r_{22}) et (r_{31}, r_{32}) situés dans le plan $\xi\eta$ permettent de déterminer la vue du système $x''y''z''$ du côté de l'axe ζ ou, ce qui revient au même, les projections des axes x'', y'' et z'' sur le plan $\xi\eta$ (v. fig. 152).

Il n'est pas difficile d'établir maintenant une règle permettant de déterminer la vue, du côté de la partie positive de l'axe ζ, du système de coordonnées mobile xyz après que celui-ci a effectué une suite de rotations qui le font passer de la position de départ $x^0y^0z^0$ dans la position d'arrivée $x^\nu y^\nu z^\nu$ [1]).

Supposons que la matrice K caractérise la position du système de coordonnées $x^0y^0z^0$ par rapport au système $\xi\eta\zeta$ (en fait, cette matrice détermine également la rotation finie du système xyz de la position $\xi\eta\zeta$ dans la position $x^0y^0z^0$). Désignons par L', L'', . . ., L^ν les matrices correspondant aux rotations mentionnées du système de coordonnées xyz qui s'effectuent chaque fois autour d'un de ses axes. Chacune de telles matrices peut être représentée par l'une des matrices A (α), B (β) ou C (γ) décrites au chap. III, § 7. Il est évident qu'il s'agit maintenant de calculer la matrice

$$S = L^\nu L^{\nu-1} \ldots L''L'K \tag{33}$$

et de la mettre sous la forme

$$S = \begin{matrix} \\ x^\nu \\ y^\nu \\ z^\nu \end{matrix} \begin{matrix} \xi & \eta & \zeta \\ \left\Vert \begin{matrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{matrix} \right\Vert \end{matrix} . \tag{34}$$

Les points situés dans le plan $\xi\eta$ et ayant comme coordonnées (s_{11}, s_{12}), (s_{21}, s_{22}) et (s_{31}, s_{32}) seront alors les projections des points déterminants *1*, *2* et *3* du système xyz lorsque celui-ci est amené en coïncidence avec le système $x^\nu y^\nu z^\nu$. Ces points se situent respectivement sur les axes x^ν, y^ν, z^ν à une distance égale à l'unité, de l'origine commune des systèmes de coordonnées $\xi\eta\zeta$ et xyz.

Exemple numérique.— On considère le système de coordonnées xyz qui tourne successivement, à partir de sa position de départ $x^0y^0z^0$, autour des axes x, y et z chaque fois de 15°, sa position $x^0y^0z^0$ par rapport au système $\xi\eta\zeta$ étant déterminée par la matrice (24). Dans le cas considéré,

$$L' = A\ (15°), \quad L'' = B\ (15°), \quad L''' = C\ (15°)$$

et

$$S = C\ (15°)\, B\ (15°)\, A\ (15°)\ K,$$

où K est la matrice (24).

Des calculs simples effectués d'après les formules du type (10) et (11), qui peuvent, bien entendu, être confiés à une machine mathématique, conduisent

---

[1]) Ce que nous exposons se généralise aussi aisément si l'on a affaire à une suite de rotations s'effectuant autour des axes donnés arbitraires. Dans ce cas, les matrices L', L'', . . ., L^ν introduites plus loin ne doivent pas être nécessairement des matrices de la forme A (α), B (β) ou C (γ).

aux résultats suivants [1]):

$$A(15^\circ)K = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ 0 & -\sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -0{,}707 & -0{,}408 & 0{,}577 \\ 0{,}707 & -0{,}408 & 0{,}577 \\ 0 & 0{,}817 & 0{,}577 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -0{,}707 & -0{,}408 & 0{,}577 \\ 0{,}683 & -0{,}183 & 0{,}707 \\ -0{,}183 & 0{,}894 & 0{,}408 \end{Vmatrix},$$

$$B(15^\circ)A(15^\circ)K = \begin{Vmatrix} \cos 15^\circ & 0 & -\sin 15^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 15^\circ & 0 & \cos 15^\circ \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -0{,}707 & -0{,}408 & 0{,}577 \\ 0{,}683 & -0{,}183 & 0{,}707 \\ -0{,}183 & 0{,}894 & 0{,}408 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -0{,}636 & -0{,}626 & 0{,}452 \\ 0{,}683 & -0{,}183 & 0{,}707 \\ -0{,}360 & 0{,}758 & 0{,}544 \end{Vmatrix},$$

$$C(15^\circ)B(15^\circ)A(15^\circ)K = \begin{Vmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ & 0 \\ -\sin 15^\circ & \cos 15^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -0{,}636 & -0{,}626 & 0{,}452 \\ 0{,}683 & -0{,}183 & 0{,}707 \\ -0{,}360 & 0{,}758 & 0{,}544 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -0{,}437 & -0{,}652 & 0{,}620 \\ 0{,}824 & -0{,}015 & 0{,}566 \\ -0{,}360 & 0{,}758 & 0{,}544 \end{Vmatrix}.$$

La règle exposée plus haut permet de conclure que les coordonnées ξ et η des projections des points caractéristiques *1*, *2*, *3* du système de coordonnées xyz sur le plan $\xi\eta$ (fig. 153) prennent successivement les valeurs suivantes:

	ξ	η		ξ	η
1^0	—0,707	—0,408	$1'$	—0,707	—0,408
2^0	0,707	—0,408	$2'$	0,683	—0,183
3^0	0,000	0,817	$3'$	—0,183	0,894
$1''$	—0,636	—0,626	$1'''$	—0,437	—0,652
$2''$	0,683	—0,183	$2'''$	0,824	—0,015
$3''$	—0,360	0,758	$3'''$	—0,360	0,758

Ici 1^0, 2^0, 3^0 désignent les points déterminants *1*, *2* et *3* du système xyz dans sa position de départ $x^0y^0z^0$ et $1'$, $2'$, $3'$ après la rotation de 15° autour de l'axe x^0 confondu avec l'axe x'. Les notations $1''$, $2''$, $3''$ sont réservées aux positions des mêmes points déterminants du système xyz, qu'ils occupent après une deuxième rotation de 15°, cette fois autour des axes confondus y' et y'', à partir de la position $x'y'z'$. Enfin, $1'''$, $2'''$, $3'''$ désignent les mêmes points du système xyz lorsqu'il prend la position $x'''y'''z'''$ par suite d'une rotation de 15° autour des axes confondus z'' et z''' à partir de la position $x''y''z''$.

Remarquons que la suite de matrices

$$K,\ AK,\ AAK = A^2K,\quad AA^2K = A^3K,\ \ldots,\ AA^{m-1}K = A^mK \quad (35)$$

permet de déterminer dans le plan $\xi\eta$ la position des projections successives d'un point de coordonnées constantes $x = a$, $y = b$, $z = c$ dans le système xyz, lorsque ce système effectue des rotations

[1]) Les calculs numériques dans cette annexe sont effectués par E. Lipkina.

successives autour de l'axe x, chaque fois du même angle α. Considérons, par exemple, le point déterminant *2* situé sur l'axe y. Il a les coordonnées (0, 1, 0) dans le système $x^0y^0z^0$, ainsi que dans chacun des systèmes $x^\varkappa y^\varkappa z^\varkappa$ ($\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, m$) déterminés par les matrices (35). Il est évident que lorsque $\varkappa$ varie, le point déterminant *2* se déplace sur une circonférence de rayon unité située dans le plan yz (confondu avec le plan y^0z^0 et avec les autres plans de coordonnées $y^\varkappa z^\varkappa$ des systèmes $x^\varkappa y^\varkappa z^\varkappa$) et de centre à l'origine commune des systèmes xyz et $\xi\eta\zeta$. Pour une valeur suffisamment faible

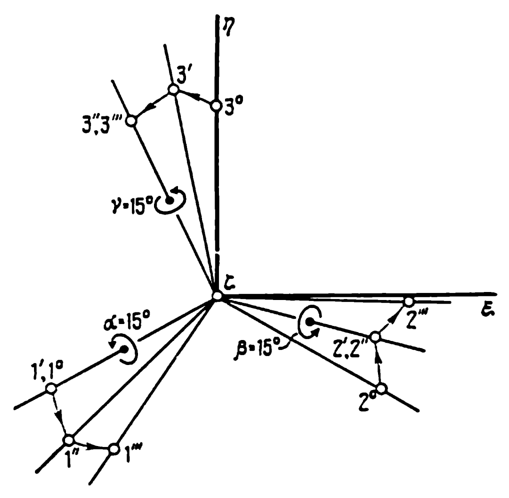


Fig. 153

de l'angle α, on peut construire les projections sur le plan $\xi\eta$ d'un grand nombre de points de cette circonférence et tracer sans peine sa projection sur ce plan. C'est ainsi qu'on arrive à représenter de façon parlante la position relative des systèmes de coordonnées xyz, $x^0y^0z^0$ et $\xi\eta\zeta$, lorsque le premier de ces systèmes tourne par rapport au deuxième d'un angle donné, autour de l'axe x confondu avec l'axe x^0 (fig. 154). Par un procédé analogue (fig. 155), en utilisant les matrices

$$B^\varkappa(\beta)\, A(\alpha)\, K \quad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, m), \tag{36}$$

on peut construire les projections sur le plan $\xi\eta$ d'une suite de points de la circonférence située dans le plan $z'x'$, c'est-à-dire dans le plan zx du système de coordonnées xyz, lorsque ce dernier est passé de la position $x^0y^0z^0$ dans la position $x'y'z'$ par suite de la rotation d'angle α. A cet effet, il suffit de prendre le point déterminant *3* de coordonnées (0, 0, 1) dans le système xyz, c'est-à-dire situé sur l'axe z.

Enfin, remarquons qu'en se servant des matrices

$$C^{\varkappa}(\gamma)\,B(\beta)\,A(\alpha)\,K \quad (\varkappa = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{37}$$

on peut calculer les coordonnées ξ et η des projections des points appartenant à la circonférence ayant son centre à l'origine commune

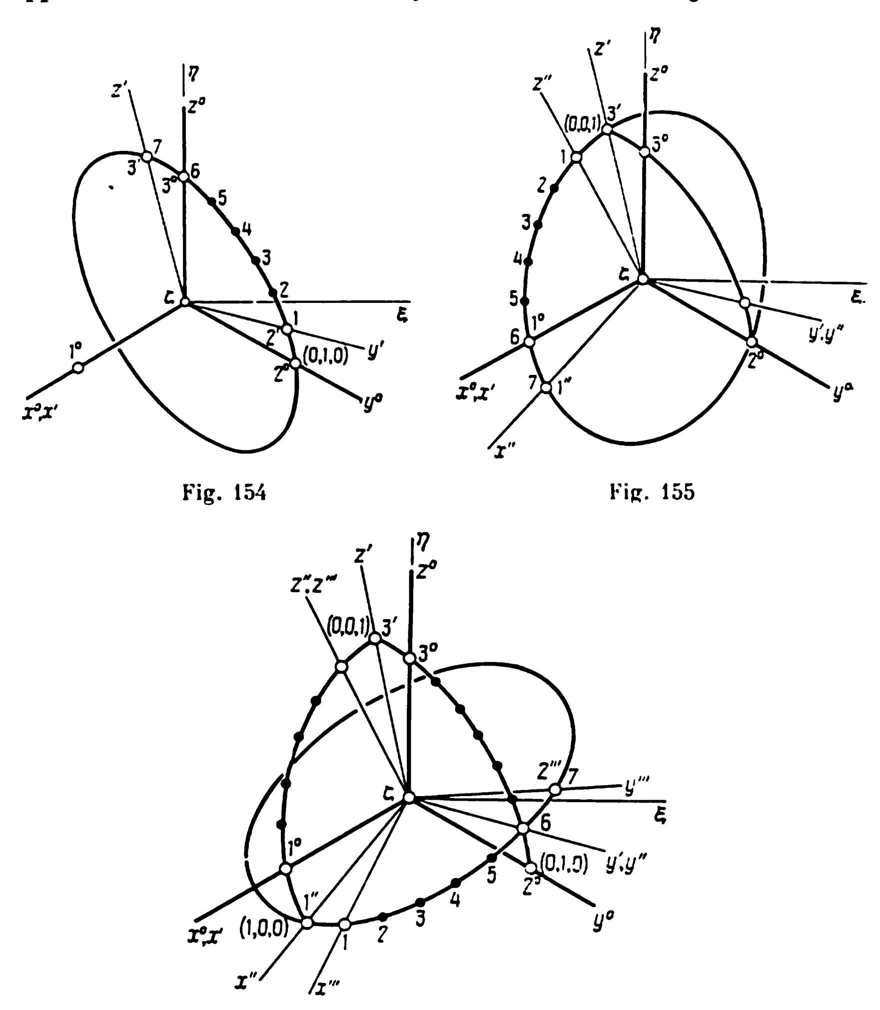


Fig. 154

Fig. 155

Fig. 156

des systèmes xyz et $\xi\eta\zeta$ et située dans le plan $x''y''$. Ceci étant, le système de coordonnées $x''y''z''$ coïncide avec la position occupée par le système xyz après deux rotations précédentes à partir de la position $x^0y^0z^0$ (fig. 156). Dans ce cas, on peut prendre le point détermi-

nant *1* situé sur l'axe x du système xyz, c'est-à-dire le point de coordonnées (1, 0, 0).

Pour calculer les puissances des matrices élémentaires $A(\alpha)$, $B(\beta)$ et $C(\gamma)$, on peut mettre à profit leur propriété suivante. Soient, par exemple, $B(\beta_1)$ et $B(\beta_2)$ deux matrices simples (30) dont les arguments β_1 et β_2 ne sont pas égaux dans le cas général. En utilisant la règle de multiplication (11) des matrices, on peut s'assurer immédiatement que

$$B(\beta_1)\,B(\beta_2) = B(\beta_2)\,B(\beta_1) = B(\beta_1 + \beta_2). \tag{38}$$

C'est pourquoi, on a, en particulier,

$$B(\beta)\,B(\beta) = B(2\beta), \quad B(\beta)\,B(2\beta) = B(3\beta), \tag{39}$$

et, dans le cas général,

$$B^{\varkappa}(\beta) = B(\varkappa\beta). \tag{40}$$

Exemple numérique.— Posons dans la suite de matrices (35) $A = A\,(15°)$, c'est-à-dire $\alpha = 15°$. Puis, utilisons les formules (9) en y posant $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$. Du fait de ce qui précède, les points de la circonférence située dans le plan yz (y^0z^0) seront représentés dans le plan $\xi\eta$ par leurs projections ayant comme coordonnées

$\varkappa$	ξ	η	$\varkappa$	ξ	η
0	0,707	—0,408	6	0,000	0,816
1	0,683	—0,183	7	—0,183	0,894
2	0,612	0,055	8	—0,354	0,911
3	0,500	0,289	9	—0,500	0,866
4	0,354	0,503	10	—0,612	0,762
5	0,183	0,683	11	—0,707	0,408.

Il est naturel que les coordonnées ξ et η des points de numéro $\varkappa = 12, 13, 14, \ldots$ $\ldots, 23$ ne diffèrent des coordonnées correspondantes des points de numéro $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, 11$ que par le signe.

Prenons maintenant $\alpha = 15°$, $\beta = 15°$. En calculant les matrices (36) et en posant $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ dans les formules du type (15), nous obtenons pour les coordonnées ξ et η des points de la circonférence située dans le plan $z'x'$ les valeurs suivantes:

$\varkappa$	ξ	η	$\varkappa$	ξ	η
0	—0,183	0,894	6	—0,707	—0,408
1	—0,360	0,758	7	—0,636	—0,626
2	—0,512	0,570	8	—0,521	—0,801
3	—0,629	0,344	9	—0,371	—0,921
4	—0,704	0,094	10	—0,195	—0,979
5	—0,730	—0,163	11	—0,006	—0,970.

Enfin, pour les points de la circonférence située dans le plan $x''y''$, les coordonnées ξ et η sont les suivantes:

$\varkappa$	ξ	η	$\varkappa$	ξ	η
0	−0,636	−0,626	6	0,683	−0,183
1	−0,437	−0,652	7	0,824	−0,015
2	−0,209	−0,633	8	0,909	0,154
3	0,033	−0,572	9	0,932	0,313
4	0,274	−0,471	10	0,892	0,450
5	0,495	−0,339	11	0,791	0,557.

Pour le calcul de ces coordonnées il convient de se servir des matrices (37) et des relations analogues à (9) et (15), en y posant $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$. De plus, dans les matrices (37) il faut poser $\alpha = \beta = \gamma = 15°$.

Les procédés indiqués précédemment permettent, dans une certaine mesure, d'obtenir des algorithmes pour l'exécution des dessins représentant les schémas de principe (organigrammes) des systèmes à la cardan et, dans le cas le plus simple, des dessins comportant une disposition relative complexe des systèmes de coordonnées (des trièdres). En outre, l'emploi de ces procédés permet de réaliser une sorte de codage (enregistrement) de tels dessins au moyen de matrices. C'est ainsi qu'un dessin représentant la position de départ $x^0y^0z^0$ et trois positions consécutives du système de coordonnées xyz, obtenues par suite des rotations successives autour des axes x (x^0, x'), y (y', y'') et z (z'', z'''), effectuées des angles d'Euler-Krylov α_1, β_1, γ_1 (déplacement angulaire de première espèce, v. chap. III, § 5), est représenté, compte tenu de ce qui précède, par l'expression

$$S_1 = C(\gamma_1)\,B(\beta_1)\,A(\alpha_1)\,K. \tag{41}$$

Ici, la matrice K caractérise la position initiale du système xyz, désignée plus haut par $x^0y^0z^0$.

Si l'on fait tourner le système d'abord de l'angle β_2 autour de l'axe y (y^0, y') et ensuite autour des axes x (x', x'') et z (z'', z''') respectivement des angles α_2 et γ_2 (déplacement angulaire de deuxième espèce, v. de nouveau chap. III, § 5), le dessin peut être reproduit à l'aide du produit matriciel suivant:

$$S_2 = C(\gamma_2)\,A(\alpha_2)\,B(\beta_2)\,K. \tag{42}$$

Enfin, un dessin représentant trois rotations successives d'un système de coordonnées, effectuées des angles d'Euler classiques, est codé à l'aide de matrices de la façon suivante:

$$S_3 = C(\varphi)\,A(\theta)\,C(\psi)\,K. \tag{43}$$

L'algorithme de la construction des projections, sur le plan $\xi\eta$, des arcs de circonférence, en vue de la représentation graphique

des angles de rotation d'un trièdre, peut être obtenu, lui aussi, sous forme matricielle. Ainsi, par exemple, les matrices (35) à (37) représentent des algorithmes de ce type pour l'ensemble des angles

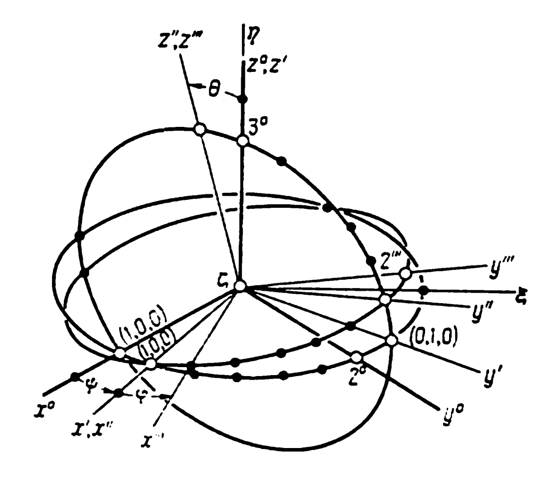


Fig. 157

d'Euler-Krylov. Il en est de même des matrices

$$C^{\varkappa}(\psi)\,K, \quad A^{\varkappa}(\theta)\,C(\psi)\,K, \quad C^{\varkappa}(\varphi)\,A(\theta)\,C(\psi)\,K, \tag{44}$$

pour le système d'angles d'Euler (fig. 157). Les calculs pour $\psi = \theta = \varphi = 15°$ donnent pour ces circonférences les suites de coordonnées suivantes:

$C^{\varkappa}(15°)\,K$			$A^{\varkappa}(15°)\,C(15°)\,K$			$C^{\varkappa}(15°)\,A(15°)\,C(15°)\,K$		
$\varkappa$	ξ	η	$\varkappa$	ξ	η	$\varkappa$	ξ	η
0	−0,707	−0,408	0	0,866	−0,287	0	−0,500	−0,500
1	−0,500	−0,500	1	0,836	−0,068	1	−0,266	−0,500
2	−0,259	−0,558	2	0,750	0,158	2	−0,015	−0,467
3	0,000	−0,577	3	0,612	0,373	3	0,238	−0,401
4	0,259	−0,558	4	0,433	0,563	4	0,474	−0,308
5	0,500	−0,500	5	0,244	0,714	5	0,679	−0,195
6	0,707	−0,408	6	0,000	0,816	6	0,836	−0,068
7	0,866	−0,289	7	−0,244	0,863	7	0,937	0,064
8	0,966	−0,149	8	−0,433	0,851	8	0,974	0,191
9	1,000	0,000	9	−0,612	0,781	9	0,945	1,306
10	0,966	0,149	10	−0,750	0,658	10	0,851	0,399
11	0,866	0,289	11	−0,836	0,490	11	0,699	0,465.

La première matrice (12), désignée dans les exemples ci-dessus par K, détermine la position de départ $x^0y^0z^0$ du système xyz par rapport au système $\xi\eta\zeta$ (dont l'axe ζ est perpendiculaire au plan de la figure). Remarquons qu'elle peut être représentée (on peut le vérifier sans peine) par le produit de deux matrices

$$K = C\,(-135°)\,A\,(-54°45'). \tag{45}$$

Ceci signifie que le système de coordonnées xyz passe de la position $\xi\eta\zeta$ dans la position $x^0y^0z^0$ en effectuant deux rotations successives. D'abord, de l'angle $\alpha = -54°45'$ (c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre) autour de l'axe x confondu avec l'axe ξ. Puis, autour de l'axe z dans sa nouvelle position z^0, de l'angle $\gamma = -135°$ (c'est-à-dire de nouveau dans le sens des aiguilles d'une montre). Dans le premier cas, la rotation est à observer du côté de la partie positive de l'axe ξ et dans le second, du côté de l'axe z^0 qui coïncide avec la nouvelle position de l'axe z après la réalisation de la première rotation. La représentation (45) correspond à un déplacement angulaire de première espèce (v. chap. III, § 5), c'est-à-dire à des rotations successives s'effectuant des angles d'Euler-Krylov α, β et γ, l'angle β étant nul. Les angles d'Euler classiques ψ, θ et φ correspondant au passage du système xyz de la position $\xi\eta\zeta$ dans la position $x^0y^0z^0$ se présentent dans ce cas de la façon suivante:

$$\psi = 0, \quad \theta = \alpha, \quad \varphi = \gamma. \tag{46}$$

D'autres représentations de la matrice K sous forme de produits des mêmes matrices A, B et C disposées dans un ordre différent, sont également possibles. Il est facile de voir que la recherche des arguments α, β et γ de telles matrices se ramène à la résolution d'un système d'équations trigonométriques. Les premiers membres de ces équations contiennent des éléments du produit des matrices mentionnées, et les seconds membres, des éléments correspondants (18) de la matrice K.

Signalons, pour conclure, que les formules de changement de coordonnées

$$\begin{aligned} \xi &= k_{11}x + k_{21}y + k_{31}z, \\ \eta &= k_{12}x + k_{22}y + k_{32}z, \\ \zeta &= k_{13}x + k_{23}y + k_{33}z, \end{aligned} \tag{47}$$

analogues aux relations (3), ainsi que les formules inverses

$$\begin{aligned} x &= k_{11}\xi + k_{12}\eta + k_{13}\zeta, \\ y &= k_{21}\xi + k_{22}\eta + k_{23}\zeta, \\ z &= k_{31}\xi + k_{32}\eta + k_{33}\zeta \end{aligned} \tag{48}$$

peuvent être mises, comme on le sait, sous forme matricielle. Appelons *matrices de coordonnées* les matrices

$$X = \begin{Vmatrix} x & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \Xi = \begin{Vmatrix} \xi & 0 & 0 \\ \eta & 0 & 0 \\ \zeta & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{49}$$

déterminées par les coordonnées d'un point quelconque dans les systèmes respectifs xyz et $\xi\eta\zeta$.

Il est aisé de s'assurer que les formules (47) (avec les identités annexes $0 \equiv 0$) sont contenues dans l'égalité matricielle suivante:

$$\begin{Vmatrix} \xi & 0 & 0 \\ \eta & 0 & 0 \\ \zeta & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{50}$$

A cet effet, il suffit de tenir compte de l'ordre des facteurs et de la règle de multiplication (11) des matrices, ainsi que du fait qu'une égalité matricielle est équivalente dans ce cas à neuf égalités algébriques. De même, l'ensemble des formules (48) (avec les mêmes six identités $0 \equiv 0$) est équivalent à l'égalité matricielle suivante:

$$\begin{Vmatrix} x & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \xi & 0 & 0 \\ \eta & 0 & 0 \\ \zeta & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{51}$$

L'ensemble des éléments de la matrice

$$K = \begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{Vmatrix} = \| k_{ij} \| \tag{52}$$

peut être considéré comme table des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes xyz et $\xi\eta\zeta$. De même, les éléments de la *matrice* ${}^tK$ dite *transposée*, que l'on obtient à partir de la matrice K en permutant les lignes avec les colonnes de même indice, c'est-à-dire de la matrice

$${}^tK = \begin{Vmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{Vmatrix} = \| k_{ji} \|, \tag{53}$$

forment, eux aussi, une table des cosinus des angles formés entre les axes des mêmes systèmes, pris cette fois dans l'ordre inverse, c'est-à-dire $\xi\eta\zeta$ et xyz. C'est ainsi, par exemple que les éléments de la première ligne de la matrice K, c'est-à-dire k_{11}, k_{12} et k_{13}, représentent les cosinus des angles faits par l'axe x avec les axes

ξ, η et ζ. A leur tour, les éléments de la première ligne de la matrice transposée ${}^tK$ traduisent les cosinus des angles faits par l'axe ξ avec les axes x, y et z. Les lettres supplémentaires que comportent les matrices K, L et Q dans les formules (12) servent justement à une indication précise des axes des systèmes de coordonnées correspondants (dont les cosinus des angles constituent les éléments d'une matrice donnée).

Compte tenu des désignations (49), (52) et (53), on peut mettre les égalités matricielles (50) et (51) sous la forme suivante:

$$\Xi = {}^tKX \tag{54}$$

et

$$X = K\Xi. \tag{55}$$

Remarquons qu'en utilisant les règles de multiplication des matrices (v. chap. III, § 7), il n'est pas difficile de déduire la relation (55) de la relation (54) et vice versa. A cet effet, multiplions à gauche les deux membres de l'égalité matricielle (54) par la matrice K. Il vient

$$K\Xi = K{}^tKX. \tag{56}$$

Le produit des matrices K et ${}^tK$ (prises dans n'importe quel ordre) est égal à la matrice unité E. On peut s'en assurer en tenant compte des propriétés connues que possèdent les coefficients d'une table des cosinus du type

$$\begin{aligned} k_{11}^2 + k_{12}^2 + k_{13}^2 &= 1, \\ k_{11}^2 + k_{21}^2 + k_{31}^2 &= 1, \\ k_{11}k_{21} + k_{12}k_{22} + k_{13}k_{23} &= 0, \\ k_{11}k_{12} + k_{21}k_{22} + k_{31}k_{32} &= 0 \end{aligned} \tag{57}$$

etc. Ainsi,

$$K{}^tK = {}^tKK = E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{58}$$

où E est une matrice appelée *matrice unité* (v. chap. III, § 7). Il en résulte que l'égalité (57) prend la forme

$$K\Xi = EX. \tag{59}$$

Etant donné que toute matrice multipliée à gauche (ainsi qu'à droite) par la matrice unité ne change pas, la formule (55) se déduit immédiatement de la dernière égalité.

Les résultats obtenus plus haut restent encore valables dans le cas où aux matrices (49) on fait correspondre, en conservant les

mêmes désignations, des matrices appelées *matrices colonnes*[1])

$$X = \left\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\|, \quad \Xi = \left\| \begin{matrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{matrix} \right\|. \tag{60}$$

En outre, il est utile d'introduire des matrices lignes

$${}^tX = \| x, y, z \|, \quad {}^t\Xi = \| \xi, \eta, \zeta \|, \tag{61}$$

en les interprétant comme une forme abrégée des matrices carrées transposées

$${}^t\left\| \begin{matrix} x & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad {}^t\left\| \begin{matrix} \xi & 0 & 0 \\ \eta & 0 & 0 \\ \zeta & 0 & 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \xi & \eta & \zeta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{62}$$

Ceci étant, aux matrices carrées (49) et par là même aux matrices colonnes correspondantes (60), on peut faire correspondre des matrices lignes transposées, à savoir:

$$X = {}^t\| x, y, z \|, \quad \Xi = {}^t\| \xi, \eta, \zeta \|. \tag{63}$$

Les égalités matricielles (50) et (51) ou, ce qui revient au même, les égalités (54) et (55) prennent maintenant la forme suivante:

$${}^t\| \xi, \eta, \zeta \| = {}^tK^t \, \| x, y, z \|, \quad {}^t\| x, y, z \| = {}^tK^t \| \xi, \eta, \zeta \|. \tag{64}$$

Les formules (61) entraînent encore les égalités suivantes pour les matrices lignes:

$$\| \xi, \eta, \zeta \| = K \, \| x, y, z \|, \quad \| x, y, z \| = {}^tK \, \| \xi, \eta, \zeta \|. \tag{65}$$

Note: Pour rendre aux formules une forme algorithmique, il est souvent utile de désigner l'ensemble des coordonnées d'un point non pas par trois lettres différentes, mais par une même lettre affectée d'un indice numérique. C'est ainsi qu'au lieu de (x, y, z) on utilise (x_1, x_2, x_3), au lieu de (ξ, η, ζ) on introduit (ξ_1, ξ_2, ξ_3), etc. Les dénominations des axes et des systèmes de coordonnées deviennent: $x_1x_2x_3$ au lieu de xyz, $\xi_1\xi_2\xi_3$ au lieu de $\xi\eta\zeta$, etc. Ceci rend plus justifiable les désignations X et Ξ introduites plus haut pour les matrices colonnes. Il en résulte la représentation suivante de

---

[1]) Une matrice colonne peut, bien entendu, être considérée comme une matrice rectangulaire. Dans ce cas, le produit d'une matrice carrée du type (53) par une matrice colonne doit être considéré comme un cas particulier du produit de deux matrices rectangulaires. On sait que ce dernier produit n'est possible que si le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la deuxième. C'est précisément ce qui a lieu. Du même point de vue, on peut interpréter également les autres formules qui se rencontrent ici. Voir, par exemple: *F. R. Gantmacher*. « Théorie des matrices ». Dunod, 1966 (traduit du russe).

ces matrices par l'intermédiaire des matrices lignes:

$$X = {}^t\| x_1, x_2, x_3 \| = {}^t\| x_s \|, \quad \Xi = {}^t\| \xi_1, \xi_2, \xi_3 \| = {}^t\| \xi_s \|, \quad (66)$$

où $\| x_s \|$ et $\| \xi_s \|$ sont les désignations abrégées des matrices lignes correspondantes. Les désignations analogues des matrices K et ${}^tK$ sont données plus haut dans les formules (52) et (53).

De telles désignations des coordonnées permettent d'utiliser, pour l'écriture des équations, les abréviations adoptées en analyse tensorielle que nous avons indiquées dans la présente annexe à la page 260. En particulier les équations (47) peuvent s'écrire sous la forme

$$\xi_s = k_{\sigma s} x_\sigma \quad (s = 1, 2, 3). \quad (67)$$

Comme il a été mentionné plus haut, au second membre de la dernière égalité on n'indique pas explicitement mais on sous-entend la sommation sur l'indice « muet » σ. De même, les équations (48) s'écrivent sous la forme suivante:

$$x_s = k_{s\sigma} \xi_\sigma \quad (s = 1, 2, 3). \quad (68)$$

Ici, on sous-entend toujours la sommation sur l'indice « muet » σ. Aucun indice nouveau n'est maintenant nécessaire pour la désignation des matrices, des matrices colonnes et des matrices lignes rencontrées précédemment.

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

INDEX ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS CITÉS

TABLE DES MATIÈRES

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse :

Editions Mir,

2, 1er Rijski péréoulok,

Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique

DANS LA MÊME COLLECTION

MÉCANIQUE RATIONNELLE

par V. Starjinski

Ce manuel suit fidèlement le cours de mécanique rationnelle professé aux universités techniques et instituts polytechniques. On y trouve plus de 210 exemples et problèmes dont plus d'une centaine avec solutions détaillées, le restant étant accompagné d'indications et de réponses. Le manuel réunit ainsi dans le même livre les leçons du cours et les travaux pratiques en forme de problèmes à résoudre. Dans une série de chapitres du cours on a rompu avec l'exposé traditionnel. Ainsi, la cinématique du solide s'appuie sur le théorème d'Euler du mouvement instantané de ce dernier. En exposant les théorèmes généraux de la dynamique d'un système de points matériels, l'auteur se conforme aux cours universitaires de A. Liapounov, N. Joukovski, S. Tchaplyguine et N. Tchétaev qui remontent à Lagrange. Une telle présentation, *primo*, permet de ne pas introduire les forces de liaison sans frottement et, *secundo*, définit une approche commune dans la résolution des problèmes de dynamique: rechercher les déplacements virtuels du système et les intégrales premières correspondantes.
L'ouvrage contient également des compléments au programme: mouvement du point matériel dans le champ de forces centrales et trajectoires des satellites artificiels de la Terre, apesanteur et accélération dans l'Espace, l'utilisation des ordinateurs à la résolution des problèmes de mécanique.

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA MÉCANIQUE

par I. Irodov

Le manuel de I. Irodov, candidat ès sciences physiques et mathématiques, professeur à la chaire de Physique générale de l'Université de Moscou, traite des principes fondamentaux de la mécanique classique et relativiste, des lois de mouvement, des principes de la concervation de l'énergie, de l'impulsion et du moment cinétique. D'un contenu classique, mais présenté de façon moderne très claire et facilement assimilable le manuel fait une large part aux applications pratiques. L'exposé est illustré d'un grand nombre d'exemples et de problèmes. Chaque chapitre commence par un exposé théorique suivi d'exemples et de problèmes très suggestifs traités souvent jusqu'à la résolution numérique ou munis d'indications détaillées. Les sujets des 80 problèmes proposés sont intimement liés au texte et souvent le complètent et le développent.